# 极限的基本理论与方法

甘肃人民出版社

# 极限的基本理论与方法

王仲春　何平　刘夫孔

甘肃人民出版社

一九八二·兰州

责任编辑　王水汀
封面设计　杜海涛

极限的基本理论与方法

王仲春　何干　刘夫孔

甘肃人民出版社出版
（兰州第一新村51号）
甘肃省新华书店发行　　兰州新华印刷厂印刷
开本787×1092毫米 1/32　印张6.625　字数139,000
1983年7月第1版　　1983年7月第1次印刷
印数 1—8,000
书号：13096·86　　定价：0.56元

# 前　言

《极限的基本理论与方法》一书，着重于对极限论中的基本概念、基本理论以及方法，作比较系统的阐述。同时，对其中重要的概念、性质、原理，以及它们的特征、意义、应用，都作了评注和说明。

本书是在西北师范学院数学系主任郑宪祖教授直接指导下编写的。西北师范学院数学系副主任丁传松副教授对本书提出过宝贵的修改意见，在此一并致谢。

编　者

一九八二年四月

## 内 容 简 介

本书对极限论中的基本概念、基本理论和方法作了比较深入而系统的阐述，对一些应该注意的问题作了评注与说明。可供大、中学师生参考。对一般学习微积分的读者也有一定的参考价值。



# 目　录

# §1　极限方法的基本思想及其重要意义

## 一　极限方法的基本思想

极限是描述数列和函数在无限过程中的变化趋势的重要概念．极限方法是微积分中的基本方法，它是人们从有限认识无限、从近似认识精确、从量变认识质变的一种数学方法．

早在两千多年前，在庄子的《天下篇》里引惠施的话说，“一尺之棰，日取其半，万世不竭”．就是把一根一尺长的木棒，第一天截取半尺余半尺；第二天从第一天所剩下的半尺截取一半，即截取$\frac{1}{4}$尺，余$\frac{1}{4}$尺；第三天又从第二天所剩下的$\frac{1}{4}$尺截取一半，即截取$\frac{1}{2^3}$尺，余$\frac{1}{2^3}$尺；如此继续下去，直至第n天．我们把逐日截取的量记为$a_n$，余下的量记为$r_n$，逐日截取量积累起来的和记为$S_n$，列入下表。

当n越来越大时，数列$\{a_n\}$或$\{r_n\}$的项随着n的增大而越来越小．但无论n多么大，所截取的量和余下的量总还有$\frac{1}{2^n}$尺，这就是所谓的万世不竭．万年虽然漫长，毕竟有限，如果我们把“日取其半”不断进行下去，当天数n无限制增

| 天次(n) | 1 | 2 | 3 | … | n |
|---|---|---|---|---|---|
| 逐日截取量($a_n$) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | … | $\frac{1}{2^n}$ |
| 积累和($S_n$) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$ $=1-\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}$ $=1-\frac{1}{2^3}$ | … | $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$ $=1-\frac{1}{2^n}$ |
| 余量($r_n$) | $\frac{1}{2}$ | $\frac{1}{2^2}$ | $\frac{1}{2^3}$ | … | $\frac{1}{2^n}$ |

大（记成$n\to\infty$）时，直观上很明显，$a_n$或$r_n=\frac{1}{2^n}$将无限制地变小，只要天数足够多，它就可以任意接近于零，但它又不是真正的等于零，这说明随着n的变大，变量$a_n$或$r_n$的变化有一种趋势——越变越小，可以小到任意地接近于零，我们把0就叫做数列$\{r_n\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots$$

的极限．记为

$$\lim_{n\to\infty} r_n=0\ 或\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0.$$

再来考察数列$\{S_n\}$：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3},\cdots,\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n},\ \cdots$$

的变化趋势，$S_n$表示逐日截取的量积累起来的和，假若指定某一天次（n），不妨设$n=100$，则$S_{100}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{100}}$

$=1-\frac{1}{2^{100}}$. 这是一个有限和，用初等数学的方法总是可以计算出来的. 问题是一尺之棰要日复一日地截取下去，随着天次的增长，我们就要计算一个无限和：

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}+\cdots,$$

如何计算这个无限和呢？由构成的积累和$S_n$的意义，只有研究数列$\{S_n\}$在n无限增大的过程中的变化趋势了. 由于在第（n－1）天与第n天截取的量分别为$\frac{1}{2^{n-1}}$和$\frac{1}{2^n}$，于是在第n天积累的量$S_n$比第（n－1）天积累的量$S_{n-1}$要多$\frac{1}{2^n}$，即

$$S_{n-1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n}=S_n.$$

这说明$\{S_n\}$有逐日增大的趋势，但它又不是增大得无法估计，因为

$$S_n=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}=1-a_n<1,$$

当n无限增大时，$a_n$与0任意地逼近. 所以，当n无限增大时，数列$\{S_n\}$愈到后来的项就愈逼近于1，故有

$$\lim_{n\to\infty}S_n=1.$$

这说明极限概念是从数量上描述变量在无限过程中的变化趋势的. 为了正确地理解极限方法的基本思想，再看下面两个例子.

**1　面积问题**

在面积的计算问题中，对某些规则的平面图形，如三角

形、梯形等，可以运用相应的面积公式．但是对某些“曲”边或“不规则”的平面图形，在初等数学中就没有理想的面积公式可用．于是只好将曲的或不规则的图形分割成规则的图形，实际上是把整体分成了许多局部．就整体来说，其周界是曲的或不规则的，但就其局部来说，小段曲线可以用直线段去近似代替，即在局部的小段曲线或不规则的部分上可以近似地“以直代曲”．再把这些局部的图形加起来就近似地得到整体．分得越细，所得的近似值就越精确．

例1　求抛物线$y=x^2$、直线$x=1$和$x$轴围成的曲边三角形OAB的面积．

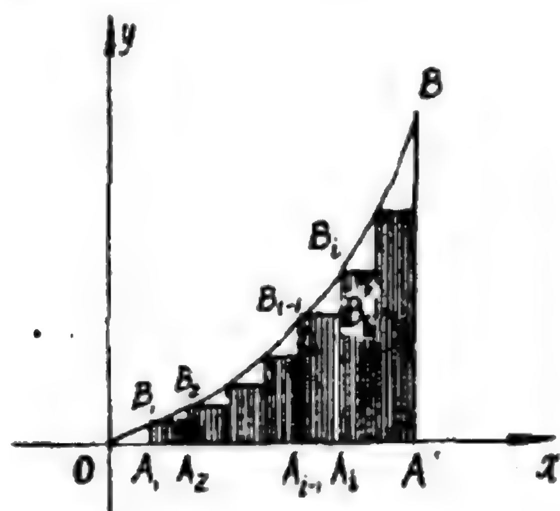



图　1—1

把曲边三角形OAB分成n个小曲边梯形，再把每一个小曲边梯形的曲边$B_{i-1}B_i$以直线段$B_{i-1}B_i$代之，这样就得到若干个与相应的小曲边梯形面积近似的小矩形．具体来说，就是分OA为n个相等的小段，分点$A_i$（$i=1,2,\cdots,n-1$）的横坐标为

$$\frac{1}{n},\ \frac{2}{n},\ \frac{3}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},$$

每一小段的长为$\frac{1}{n}$，于是以$f(\frac{i}{n})$（$i=0,1,2,\cdots,n-1$）为高，得到n个小矩形，其面积的总和

$$S_n=0\cdot\frac{1}{n}+(\frac{1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}+(\frac{2}{n})^2\cdot\frac{1}{n}+\cdots+(\frac{n-1}{n})^2\cdot\frac{1}{n}$$

$$= \frac{1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2}{n^3}$$

$$= \frac{(n-1)n(2n-1)}{6n^3}$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$$

是曲边三角形OAB面积的近似值。当n增大时，相应地得到一串近似程度随着提高的近似值。考虑这些近似值的变化趋势，当$n \to \infty$时，$\frac{1}{2n}$和$\frac{1}{6n^2}$都趋于O，所以曲边三角形OAB的面积为

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}\right) = \frac{1}{3}.$$

求曲边三角形 OAB 的面积问题，在这里实际上是考察数列

$$S_1,\ S_2,\ S_3,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots$$

（其中 $S_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n} + \frac{1}{6n^2}$）当n 无限增大时的变化趋势问题。

**2　速度问题**

下面再来讨论变速运动的速度问题。

对作匀速运动的物体，它的速度V的求法是以运动所需的时间t去除物体所移动的距离S，即

$$V = \frac{S}{t}. \qquad (1)$$

但对变速运动，由于在整个过程中，其速度是时时在变化着的，因此，所说的速度是指运动物体在某一时刻的瞬时速度，而用公式（1）去求，求出来的只是在某段时间内的平

均速度．如何求变速运动的速度呢？下面以自由落体运动为例，分析这种速度的求法．

例 2　设物体在初始时是静止的，据实验知，如果忽略空气阻力的作用，在时间t内物体下落的路程S为

$S=\frac{1}{2}gt^2$（其中g是重力加速度）问自由落体在其路程中的每一点上速度有多快？此即物理上自由落体的瞬时速度问题．

设物体在时刻$t_0$经过某一点$M_0$（图1—2），现在要求的就是物体在时刻$t=t_0$的速度．

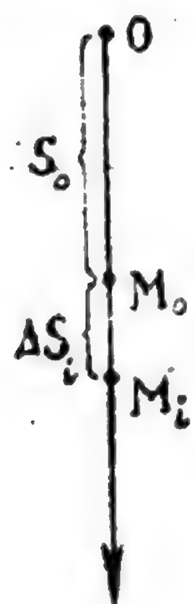


图1—2

如果用$t_0$去除$S_0=\frac{1}{2}gt_0{}^2$，得到的结果为$\frac{1}{2}gt_0$，它是从运动开始到$t_0$这段时间内的平均速度，并非物体在点$M_0$的速度．

假若令物体在时刻$t_0+\Delta t_i$经过某一点$M_i$（其中$\Delta t_i=\frac{1}{10^i}$秒，代表从$t_0$开始所经过的时间，i＝0，1，2，…，n），那么落体在$\Delta t_i$这段时间内所走过的路程为

$$\Delta S_i=\frac{1}{2}g\ (t_0+\Delta t_i)^2-\frac{1}{2}gt_0{}^2$$

$$=gt_0\cdot\Delta t_i+\frac{1}{2}g\cdot(\Delta t_i)^2,$$ 则

$$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t_i)^2-\frac{1}{2}gt_0{}^2}{\Delta t_i}$$

$$=gt_0+\frac{1}{2}g\cdot\Delta t_i$$

是落体在 $t_0$ 到 $t_0+\Delta t_i$ 这段时间内的平均速度，令$\Delta t_i=1$ 秒，$\frac{1}{10}$秒，$\frac{1}{10^2}$秒，…，$\frac{1}{10^n}$秒，代入上式，将所得的结果列入下表

| $\Delta t_i$ | $\Delta S_i$ | $\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$ |
|---|---|---|
| 1 | $gt_0+\frac{1}{2}g$ | $gt_0+\frac{1}{2}g$ |
| 0.1 | $\frac{gt_0}{10}+\frac{g}{2\cdot10^2}$ | $gt_0+\frac{g}{2\cdot10}$ |
| 0.01 | $\frac{gt_0}{10^2}+\frac{g}{2\cdot10^4}$ | $gt_0+\frac{g}{2\cdot10^2}$ |
| 0.001 | $\frac{gt_0}{10^3}+\frac{g}{2\cdot10^6}$ | $gt_0+\frac{g}{2\cdot10^3}$ |
| 0.0001 | $\frac{gt_0}{10^4}+\frac{g}{2\cdot10^8}$ | $gt_0+\frac{g}{2\cdot10^4}$ |
| 0.00001 | $\frac{gt_0}{10^5}+\frac{g}{2\cdot10^{10}}$ | $gt_0+\frac{g}{2\cdot10^5}$ |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ |
| $\underbrace{0.00\cdots01}_{n-1\text{个}}$ | $\frac{gt_0}{10^n}+\frac{g}{2\cdot10^{2n}}$ | $gt_0+\frac{g}{2\cdot10^n}$ |

象前面处理曲边三角形一样，虽然在整段过程内速度是变的，对于每一个 $\Delta t_i$，平均速度$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$确实不能确切地反

映物体在时刻$t_0$的速度，但是当$\Delta t_i$越来越小时，在局部很小的一段时间内，变速可以近似地看成匀速，即近似地“以匀速代变速”。根据这个观念，从上表可以看出，如果让$\Delta t_i$依次取1，$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，…，$\frac{1}{10^n}$，一方面$t_0+\Delta t_i$就越来越接近时刻$t_0$，另一方面相应的平均速度$\frac{\Delta S_i}{\Delta t_i}$也就越来越接近时刻$t_0$的速度，那么剩下来的就是从近似过渡到精确的问题了。

为了从近似过渡到精确，由于$\Delta t_n=\frac{1}{10^n}$，可以让n无限制地增大，当$n\to\infty$时，$\Delta t_n$无限制地变小，由上表容易看出$\frac{g}{2\cdot 10^n}$也无限制地变小，那么$\frac{\Delta S_n}{\Delta t_n}$就和$gt_0$无限制地接近，即

$$V_0=\lim_{\Delta t_n\to 0}\frac{\Delta S_n}{\Delta t_n}=\lim_{\Delta t_n\to 0}\left(gt_0+\frac{1}{2}\cdot\frac{g}{10^n}\right)$$

$$=gt_0.$$

这就是自由落体在时刻$t_0$的瞬时速度.

上面列举的面积问题，实质上是积分学中的问题；变速运动的瞬时速度问题，又是微分学中的问题. 我们在讨论这些典型问题的时候，一个最基本的观点，就是变化的观点，这是辩证法在数学中的运用. 如果没有这种变化的观点，就无法认识圆的面积、曲边三角形的面积、曲线的切线、变速运动的瞬时速度等等. 如在圆面积问题中，我们把圆面积看成圆内接多边形的边数无限增加时正多边形面积的极限，对曲边三角形面积的看法也不例外. 在求变速运动的瞬时速

度问题中，在小段时间内，以匀速近似代替变速，再从这小段时间内的平均速度的变化当中去认识瞬时速度．所讨论的面积和速度问题，虽然各个问题的具体内容不同，但都是要实现从有限过渡到无限、从近似过渡到精确、从量变过渡到质变．如何实现？只有让n无限地增大（在速度问题中让$\Delta t_n$无限地减小）．随着n无限地增大，相应地就得到一连串越来越精确的近似值，然后再考察这些近似值的变化趋势，这就是极限方法的基本思想．

## 二　从微积分的历史发展看极限方法的重要意义

十七世纪，随着生产力和科学技术的发展，牛顿（Newton）和莱布尼兹（Leibniz）在总结前人经验的基础上，创立了微积分．这门新的科学一出现，就发挥了它强大的生命力的作用，在生产和科学技术上得到了广泛的应用．但是，正当人们欢呼它的伟大胜利的时候，却发现了微积分的基础有毛病，逻辑推导自相矛盾．下面我们以求自由落体的瞬时速度为例加以说明．

为了求自由落体$S=\frac{1}{2}gt^2$在时刻$t=t_0$的瞬时速度，首先，退一步求出区间$[t_0, t_0+\Delta t]$上的平均速度

$$\overline{V}=\frac{\frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2-\frac{1}{2}gt_0^2}{\Delta t}=gt_0+g\cdot\Delta t,$$

然后，让$\Delta t=0$，可得在时刻$t=t_0$的瞬时速度

$$V(t_0)=gt_0.$$

显然这里产生了一个很大的问题：倘若$\Delta t \neq 0$，则平均速度永远是平均速度；倘若 $\Delta t = 0$，就出现$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{0}{0}$这个没有意义的“怪物”．

微积分创始人牛顿和莱布尼兹，为了摆脱这个困境，分别提出了好几种说法，譬如：

其一，因$\Delta t$无限小，无限小又不为零，故可作除法．但和有限量比较起来，无限小又可以忽略，因此，$gt_0 + \frac{1}{2}g \cdot \Delta t$可写成$gt_0$，这就是历史上所谓的“无限小”方法．

其二，称$\frac{gt_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g \cdot \Delta t$的极限为 $gt_0$，但极限又是什么呢？并未给出极限的确切定义．

其三，干脆硬性规定$gt_0$就是$t_0$的瞬时速度．

如此等等的说法，都是试图解决下列矛盾而提出的．

(i) 要使$\frac{gt_0 \cdot \Delta t + \frac{1}{2}g \cdot (\Delta t)^2}{\Delta t}$有意义，只有$\Delta t \neq 0$．

(ii)要使瞬时速度为$gt_0$，又必须$\Delta t = 0$．

这两个互相矛盾的任务，要由同一个数 $\Delta t$ 同时担负起来，这在数学上当然是不能允许的．由此可见，牛顿和莱布尼兹的种种解释，不但不能自圆其说，反而把微积分“神秘”化了．

围绕微积分的基础问题，展开了激烈的争论．包括贝克莱在内的一批神学家和唯心论哲学家，对微积分进行了严厉

的批评和攻击。然而，微积分在生产与科学技术中表现了强大的生命力，使许多数学家致力于微积分的奠基工作，经过长期努力，终于由柯西（Cauchy）、维尔斯特拉斯（Weierstrass）等人找到了科学的理论基础，即现在的极限方法。

极限方法的出现，是微积分发展史上的一个里程碑，使微积分理论更加蓬勃地发展起来。

# §2 数列极限的概念及其解释

上一节通过三个典型例子着重介绍了极限方法产生的背景、基本思想、重要意义．同时指出有极限的数列所具有的共同的特征是：从发展的趋势来看，它与一个常数可以无限制地逼近，人们称此常数为该数列的极限．作为数学的要求，应该提出这样一个问题：怎样才算一个无穷数列与一个常数无限逼近？也就是说必须给这种直观而不确切的极限概念一个严格的数学陈述．由于数列极限的定义极其重要，但初学者又难于掌握，所以本书将着重对此定义加以说明．

## 一 数列极限的ε——N定义

为了说清问题，还是从下面两个简单例子谈起．

例 1 考察数列 $\{x_n\}=\left\{1+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$．

这个数列有一个明显的特点，那就是当 n 无限制地增大时，相应的函数值 $x_n$ 无限制地向 1 逼近．换句话说，只要 n 增大到一定程度就能保证这样一件事：要 $|x_n-1|=\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$ 多么小，它就能多么小．

譬如说，要想 $\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<0.01$，只要

$n>100$；要想$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<0.001$，只要$n>1000$；要想$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<0.0003$，只要$n>3333$。一般地说，对任给正数 ε，要想$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，只要$n>N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$（以后用$[x]$表示$x$的整数部分）。

总结以上的讨论，我们可以列出如下的一张表

| 给定 | 存在 | 当 | 有 |
|---|---|---|---|
| 0.01 | 100 | $n>100$ | $\left\|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right\|=\frac{1}{n}<0.01$ |
| 0.001 | 1000 | $n>1000$ | $\left\|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right\|=\frac{1}{n}<0.001$ |
| 0.0003 | 3333 | $n>3333$ | $\left\|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right\|=\frac{1}{n}<0.0003$ |
| $\varepsilon>0$ | $N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$ | $n>N$ | $\left\|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right\|=\frac{1}{n}<\varepsilon$ |

表中第一列表达了我们事先要求的$1+\frac{(-1)^n}{n}$与1接近的程度，第二列回答了为达到这种要求，n 需要增大的程度。根据上表，我们可以得到这样的结论：对任给的正数ε，总可以找到某一个正整数N，当$n>N$时，有

$$\left|1+\frac{(-1)^n}{n}-1\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

**例2　考察数列**

$$1.9,\ 1.99,\ \cdots,\ 1.\overbrace{9\cdots9}^{n},\ \cdots$$

此数列的一般项为 $x_n = 2 - \frac{1}{10^n}$. 显然，当 n无限增大时，相应的$x_n$ 无限制地向 2 靠近，也就是说，只要n增大到一定程度，就能保证要$\left|x_n - 2\right| = \left|2 - \frac{1}{10^n} - 2\right| = \frac{1}{10^n}$多么小，它就能多么小。

譬如说，要想$\left|x_n - 2\right| = \frac{1}{10^n} < 0.1$， 只 要 $n > 1$，要想$\left|x_n - 2\right| = \frac{1}{10^n} < 0.01$，只要 $n > 2$，要想 $\left|x_n - 2\right| = \frac{1}{10^n} < 0.0002$，只要$n > N = [\lg 5000]$. 一般地说，要想$\left|x_n - 2\right| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$，只要$n > N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$.

综上所述，我们同样可列出如下的一张表

| 给定 | 存在 | 当 | 有 |
|---|---|---|---|
| 0.1 | 1 | $n > 1$ | $\left\|2 - \frac{1}{10^n} - 2\right\| = \frac{1}{10^n} < 0.1$ |
| 0.01 | 2 | $n > 2$ | $\left\|2 - \frac{1}{10^n} - 2\right\| = \frac{1}{10^n} < 0.01$ |
| 0.0002 | $[\lg 5000]$ | $n > [\lg 5000]$ | $\left\|2 - \frac{1}{10^n} - 2\right\| = \frac{1}{10^n} < 0.0002$ |
| $\varepsilon > 0$ | $N = \left[\lg\frac{1}{\varepsilon}\right]$ | $n > N$ | $\left\|2 - \frac{1}{10^n} - 2\right\| = \frac{1}{10^n} < \varepsilon$ |

根据上表，我们可以得到这样的结论：对任给$\varepsilon>0$，总可以找到这样的正整数N，当$n>N$时，有$\left|\left(2-\frac{1}{10^n}\right)-2\right|<\varepsilon$。

通过以上两个例子的分析，我们自然推想到，对于一般数列$\{x_n\}$，假如A是它的极限，即"$x_n$无限制地向A靠近"，或者"只要n增大到一定程度后，$|x_n-A|$要多小，就能有多小"。这种直观而不确切的描述，就应该严格地陈述为：对任给的正数$\varepsilon$，总可以找到某一个正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$。

**定义1** 设$\{x_n\}$是一个无穷数列，A是一个常数，若对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一个正整数N，使得当$n>N$时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

则称当$n\to\infty$时，数列$\{x_n\}$以A为极限，或者称数列$\{x_n\}$收敛于A，并记为

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A \quad 或 \quad x_n\to A\ (n\to\infty).$$

此定义中的四句话，各有其用处和含义，多一句就画蛇添足，少一句就漏洞百出，调换句子的位置也会面目全非，也就是说这个定义的陈述严谨、精练、逻辑性强，真可谓千锤百炼。

下面我们进一步对此定义的特征，定义结构中每一个"部件"的含义、职能、相互关系加以说明。

## 二 对极限ε—N定义的评注

**1.极限定义的非构造性** 数列极限的定义是一种所谓非

构造性的定义。具体来说，该定义只给出：一个数列{ $x_n$ }与一个常数A是否有极限关系的"定性"描述，并未给出由已知数列求出其极限的具体方法，因此在用极限定义讨论有关极限的问题时，必须事先知道其极限，否则就不能用.

**2.收敛数列的本质属性** 首先我们从几何直观来看它的特征（此后，请读者时时注意把实数与数轴上的点等同起来看）. 我们知道，不等式

$$|x_n - A| < \varepsilon$$

与不等式

$$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon$$

是等价的，所以数列{ $x_n$ }有极限A，也可以这样陈述：

任给$\varepsilon > 0$，数列{ $x_n$ }中恒存在一项$x_N$，在$x_N$以后的所有项$x_{N+1}$，$x_{N+2}$，$x_{N+3}$，…，都夹在数$A-\varepsilon$与$A+\varepsilon$之间. 它的几何意义是（图 2—1）：




图 2—1

对任给正数$\varepsilon$，总存在自然数N，当$n > N$时，所有的点$x_{N+1}$，$x_{N+2}$，…，都落在区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$），即A的$\varepsilon$邻域之中（以A为中心，以$\varepsilon$为半径的开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$），或者满足不等式$|x-A|<\varepsilon$的全体实数$x$叫做点A的$\varepsilon$邻域，记作，$U(A, \varepsilon) = \{ x \mid |x-A| < \varepsilon \}$），至多只有有限个点$x_1$，$x_2$，…，$x_N$在区间外. 又因$\varepsilon$可以任意小，从而开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）的长度$2\varepsilon$也可以任意小. 由此可见，不论在A的怎样小的近傍总凝聚着数列{ $x_n$ }的无穷多个点，

而且在此近傍之外至多只有有限个点，也就是说数列{ $x_n$ }中几乎所有的点全凝聚在A的近傍。

其次，一个无穷数列{ $x_n$ }除了前面有限项外，几乎全凝聚在A的近傍，这就说明这个数列发展到一定程度后，不管n变化多大，而$x_n$却变化甚微，即这个数列发展到一定程度就越来越稳定。这种“稳定性”也就是人们称为收敛的真正涵意。

**3. ε与N的作用、特点及其相互关系**

（i）作用　在此定义中ε的作用是衡量数列{ $x_n$ }与其极限A靠近的程度，因此ε必须任意。但是，并非要所有$x_n$都满足$|x_n - A|<\varepsilon$，而只要从某一项$x_N$以后的项都满足即可。至于这个N有多么大，$x_1$，$x_2$，$x_3$，…$x_N$这些项是否满足，本定义不加过问。所以，N不在大小，只须存在。

（ii）ε的特点　我们说一个无穷数列向它的极限逼近，要经历一个无限过程，这种无限过程就是通过ε的任意性表示出来的。但这个无限过程却要一步一步地来实现，而且每一步的变化都是有限的，这种有限性通过ε的给定性表示了出来。由此可见，ε具有既任意又确定的两重性。

（iii）ε与N的关系　ε给定在先，N找到在后，即N依赖于ε。但它们之间的关系又不是函数关系，因为根据定义对N的要求，它只“管后不管前”，所以，当ε给定后，只要能找到一个N，那么N＋1，N＋2，…都可以充当N的“角色”。

（iv）根据ε的职能与特点，在证明有关极限问题时，往往把ε限制在某一个有限区间内。譬如令$0<\varepsilon<\alpha$，这样作不仅不失一般性，而且有它的方便之处，这是因为对任给$\varepsilon>0$，

都有一个N，当$n>N$时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

而$0<\varepsilon<\alpha$是$\varepsilon>0$的一部分，所以对任给$0<\varepsilon<\alpha$，更能找到一个N，当$n>N$时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon.$$

反之，若任给$0<\varepsilon<\alpha$，都有N，当$n>N$时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

那么对任给的$\varepsilon'>0$，如果$\varepsilon'<\alpha$，则已有N，当$n>N$时，$|x_n-A|<\varepsilon$；如果$\varepsilon'\geqslant\alpha$，则总可找到一个$\varepsilon$，使$0<\varepsilon<\alpha\leqslant\varepsilon'$，对这个$\varepsilon$，有N，当$n>N$时，$|x_n-A|<\varepsilon$，当然也有$|x_n-A|<\varepsilon'$。因此，对任给的$\varepsilon'>0$，也能找到N，当$n>N$时，有

$$|x_n-A|<\varepsilon'.$$

正因为这样，所以有些教科书上，对定义中的$\varepsilon$陈述为"任意充分小的正数$\varepsilon$"。

例 3　证明$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，$|q|<1$。

分析　根据定义，就是要证明对任给$\varepsilon>0$，能找到N，当$n>N$时，有

$$|q^n-0|<\varepsilon.$$

如何找呢？可以从结论出发，即从$|q^n-0|=|q|^n<\varepsilon$出发。取对数得$n\lg|q|<\lg\varepsilon$。因为$|q|<1$，所以$\lg|q|<0$，因此，$n>\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$，可见只要取$N\geq\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$即可。

证明　任给$\varepsilon>0$，取正整数$N\geq\left[\dfrac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}\right]$，当$n>N$

时，有 $n>\frac{\lg\varepsilon}{\lg|q|}$，即$n\lg|q|<\lg\varepsilon$，从而$|q|^n<\varepsilon$，即

$$|q^n-0|<\varepsilon,$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=0$，

## 三　数列极限ε—N定义的否定形式

为了彻底掌握极限定义的本质，除了认识它的正面，还要搞清它的反面，即极限的否定形式．如何否定呢？我们知道，极限的定义是由两个关键量词"任给"（或"所有"）、"存在"及一个绝对值不等式组成的．因此，要否定极限的定义，只要将"任给"、"存在"、$|x_n-A|<\varepsilon$一一否定即可．因为"任给"与"存在"互为否定，$|x_n-A|<\varepsilon$的否定是$|x_n-A|\geqslant\varepsilon_0$，这样就不难写出否定式：

**定义2**　设$\{x_n\}$是一个无穷数列，A是一个常数，若存在一个正数$\varepsilon_0$，对任何自然数N，总存在一个$n_0$，当$n_0>N$时，有

$$\left|x_{n_0}-A\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则称A不是$\{x_n\}$的极限．

它的几何形象是：如果常数A不是$\{x_n\}$的极限，则必存在一个正数$\varepsilon_0$，在A的$\varepsilon_0$邻域$(A-\varepsilon_0,\ A+\varepsilon_0)$外有$\{x_n\}$的无穷多个项．

由此，不难得出发散不收敛数列的正面陈述．

**定义3**　设$\{x_n\}$是一个无穷数列，如果对任意实数A，存在一个正数$\varepsilon_0$，对任意自然数N，总存在$n_0$，当$n_0>N$时，有

$$\left|x_{n_0}-A\right|\geqslant\varepsilon_0,$$

则称数列 $\{x_n\}$ 发散。

例 4　试证 $\{x_n\}=\{(-1)^n\}$ 不收敛。

证法一　因为数列 $\{x_n\}$ 只取两个值，显然 1、－1 不是它的极限，对其它非 1、－1 的实数A，只要取 $\varepsilon_0<\min\{|A-1|, |A+1|\}$ 即可。

证法二　任取实数A，因为

$$|x_{2k}-A|+|x_{2k-1}-A|\geqslant|(x_{2k}-A)-(x_{2k-1}-A)|$$
$$=|x_{2k}-x_{2k-1}|=2\ (k=1,\ 2,\ \cdots).$$

于是，$|x_{2k}-A|$ 与 $|x_{2k-1}-A|$ 至少有一个 $\geqslant1$，不妨设

$$|x_{2k}-A|\geqslant1\qquad(k=1、2\cdots).$$

故取 $\varepsilon_0=1$，对任给N，总有偶数 $2k>N$，使

$$|x_{2k}-A|\geqslant1=\varepsilon_0,$$

所以，A不是数列 $\{x_n\}$ 的极限，故数列 $\{x_n\}$ 没有极限.

## 四　无穷小量与无穷大量

**定义 4**　极限为零的变量叫做无穷小量.

用ε—N的说法即是：

若对任给的正数ε，总存在某一个正整数N，使得当 $n>N$ 时，有

$$|x_n|<\varepsilon.$$

无穷小量与很小的量是有原则差别的. 无穷小量是指极限为零的变量，而很小的量是常量且是相对两个量比较而言的。

**定理1**　数列$\{x_n\}$的极限为A的充分必要条件是：$x_n$可表示成A与一个无穷小量$x_n$之和，即

$$x_n = A + \alpha_n,\quad \alpha_n \to 0\ (n \to \infty).$$

证明　必要性　　设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则由数列极限的ε—N定义，对任给ε>O,总存在一个N,使得当 n>N时，有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

由此可见，数列$\{x_n - A\}$是无穷小量．于是令

$$\alpha_n = x_n - A,$$

则

$$x_n = A + \alpha_n,$$

其中$\alpha_n$是$n\to\infty$时的无穷小量．

充分性　若设$x_n = A + \alpha_n$，其中A是常量，$\alpha_n$是$n\to\infty$时的无穷小量，则对任给ε>O，总存在一个N，使得当n>N时，有

$$|\alpha_n| < \varepsilon,$$

亦即

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

**定义5**　若对任给正数M，总存在某一个正整数N，使得当n>N时，有

$$|x_n| > M,$$

则称数列$\{x_n\}$是无穷大量．

显然，数列$\{x_n\}$若是一个无穷大量，按通常的意义来说，它的极限不存在，但为了方便有时也说："无穷大量的极限是无穷大"，并记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \infty.$$

如果对于上面所考虑的无穷大量 $\{x_n\}$，从某一项以后都是正的（或都是负的），就记作

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \quad (\text{或} \lim_{n\to\infty} x_n = -\infty).$$

说明　无穷大量与符号"∞"及很大的量三者有原则的不同。很大的量是一个常量，只有两个量作比较才有意义；而符号"∞"不是数；我们知道在实数范围里没有它，它只代表一个变量变化的趋势；无穷大量是指绝对值可以超过任何正数的变量。三者不可混淆。

**定理2**　若 $x_n \neq 0$，则 $\{x_n\}$ 为无穷大量的充分必要条件是：$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小量。

证明　必要性　若 $\{x_n\}$ 为无穷大量，则对任给 $\frac{1}{\varepsilon} > 0$，总存在某一个正整数N，使得当 $n > N$ 时，有

$$|x_n| > \frac{1}{\varepsilon},$$

即

$$\left|\frac{1}{x_n}\right| < \varepsilon,$$

故　$\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 是无穷小量。

充分性　若 $\left\{\frac{1}{x_n}\right\}$ 为无穷小量，则对任给 $M > 0$，总存在某一个正整数N，使得当 $n > N$ 时，有

$$\left|\frac{1}{x_n}\right|<\frac{1}{M},$$

即

$$|x_n|>M,$$

故 $\{x_n\}$ 为无穷大量.

例5　证明 $\lim\limits_{n\to\infty}q^n=+\infty$,　$q>1$.

证明　因　$0<\frac{1}{q}<1$，所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{q}\right)^n=0$，且对任意的自然数n，$q^n>0$，从而

$$\lim_{n\to\infty}q^n=+\infty.$$

## 五　对极限ε—N定义教学的建议

这一节我们主要通过正反两个方面对极限概念的特征、意义，特别是对极限的ε—N定义的结构进行了分析和说明，其目的是为了帮助读者掌握这个概念的本质。至于如何给学生讲清这个重要概念，当然要因对象不同而异。这里我们仅指出将直观定义"翻译"成确切定义的几个关键步骤供参考。

1　用"$x_n$无限逼近A"给出直观定义.

2　将"$x_n$无限逼近A"逐步"翻译"成确切的ε—N定义：

(i)　将"$x_n$无限逼近A"，换成另一说法，即"$x_n$与A的距离无穷变小"．这虽然是同义反复，但它却由直观架起了一座通向精确的桥梁.

(ii) 将"$x_n$与A的距离"用数学式子 $|x_n-A|$ 来刻划.

(iii)进一步将“$|x_n-A|$无限变小”由数学式子

$$|x_n-A|<\varepsilon \qquad (1)$$

表示出来。显然只要 $\varepsilon$ 任意小，当然能保证$|x_n-A|$任意小。

（iv） 将“n无限增大”，换成“n可以超过任何一个给定的自然数N”。

（v） 将“n可以超过任何一个给定的自然数N”，用数学式子

$$n>N \qquad (2)$$

来刻划。

最后将“n无限增大”与“$x_n$ 无限逼近A”相结合，就是极限的直观定义。相应的式（2）与式（1）相结合就是确切的定义。

## 习　题

1　下列几种陈述与极限定义是否等价？并说明理由：

（1） 对任给$\varepsilon\geq 0$，存在正整数N，当$n\geqslant N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称A是数列$\{x_n\}$的极限。

（2） 对任给$\varepsilon>0$，存在正数M，当$n>M$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称A是数列$\{x_n\}$的极限。

（3） 对任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，且$N\geqslant K$（其中K为任一确定的正整数），当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称A是数列$\{x_n\}$的极限。

（4） 对任给$\varepsilon>0$，存在正整数N，当$n>N$时，有$|x_n-A|<M\varepsilon$（其中M是与$\varepsilon$无关的，且大于零的任一常数），则称A是数列$\{x_n\}$的极限。

（5） 存在一个正整数N，对任给$\varepsilon>0$，当$n>N$时，有$|x_n-A|<\varepsilon$，则称A是数列$\{x_n\}$的极限。

2 对任一无穷数列$\{x_n\}$，给它添上有限项或去掉有限项是否会影响其收敛与发散性？为什么？

3 对任一无穷数列$\{x_n\}$的次序加以重新排列是否会影响其收敛与发散性？为什么？

4 下列各种说法是否正确？

（1） 无穷小(大)量是比任何数都小(大)的数。

（2） 无穷小(大)量是最小(大)的数。

（3） 极限定义中的$\varepsilon$(N)也是一个无穷小(大)量。

# §3 极限的基本性质及运算

上节着重对极限定义作了分析和说明，本节将介绍极限的基本性质及四则运算。

## 一 基本性质

**定理1**（唯一性） 任何收敛数列$\{x_n\}$的极限都是唯一的。

我们用同一法来证明，即假设有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A \quad \text{且} \quad \lim_{n\to\infty} x_n = B,$$

则 $\qquad A = B.$

**证明** 因为$\lim x_n = A$，则由极限定义，对任给$\varepsilon > 0$，必存在正整数$N_1$，当$n > N_1$时，有

$$\left|x_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

同样，又因$\lim x_n = B$，对上述的$\varepsilon$，存在正整数$N_2$，当$n > N_2$时，有

$$\left|x_n - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

现在取$N = \max\{N_1, N_2\}$，那么当$n > N$时，(1)、(2)两式同时成立，从而有

$$|A-B|=|A-x_n+x_n-B|\leqslant|A-x_n|+|x_n-B|$$
$$=|x_n-A|+|x_n-B|<\varepsilon.$$

由于$\varepsilon$的任意性，所以，$|A-B|=0$，即$A=B$.

说明（i）讲此性质可以先给学生利用邻域的概念说明这个性质的直观意义，这样不仅可以加深学生的感性认识，而且还可以提供证明的方法.

（ii）唯一性是收敛数列的一个重要属性，倘若无此性质，我们研究收敛数列就无实际意义。

**定义** 在数列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots \tag{3}$$

中自左往右任意选出无限多个项，并按它们在原数列中的次序加以排列，这样就得到一个新的数列

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots x_{n_k},\ \cdots \tag{4}$$

叫做数列（3）的一个子数列，记作

$$\{x_{n_k}\}.$$

注意在数列$\{x_{n_k}\}$中，k 表示$x_{n_k}$在子列（4）中的项数，而$n_k$则表示$x_{n_k}$在原数列（3）中的项数，所以，必有$k\leqslant k_n$.

**定理2（子列收敛性）** 如果数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则其任何一个子列$\{x_{n_k}\}$（$k=1,2,\cdots$）也收敛，且$\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=A$.

证明 因为，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，由极限定义，对任给$\varepsilon>0$，

必有正整数N，当$n>N$时，有

$$|x_n - A|<\varepsilon.$$

又因对任意k，皆有$n_k\geq k$，从而当$k>N$时，更有$n_k>N$，所以

$$\left|x_{n_k} - A\right|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A.$$

说明 (i) 此性质反映了收敛数列的部分与整体的关系。第四节将证明这个定理的逆命题也成立。

(ii) 利用这个性质处理极限问题，有时可以化繁为简。例如，已知数列$\{x_n\}$收敛，但不知其极限，求此极限时，可选取简单子列来作；要判定一个数列发散，只要能从中选出一个发散子列，或者只要能从中选出两个极限不同的子列即可。

例 1 令$|q|<1$，已知数列

$$1,\ q,\ \frac{1}{2},\ 2q^2,\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ nq^n,\ \cdots$$

收敛，求其极限值。

为此，我们可以抽出一个简单子列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$，显然，此子列的极限为零。从而由定理 2，其极限值为零。

例 2 证明$\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$发散。

容易看出

$$\lim_{k\to\infty} x_{2k} = 2 \quad 但 \quad \lim_{k\to\infty} x_{2k+1} = 0,$$

所以$\{x_n\}=\{1+(-1)^n\}$发散。

**定理 3** （有界性） 任何非无穷大量的收敛数列必有界，即存在正数M，使得

$|x_n|<M \qquad n=1, 2, \cdots$

证明　设$\lim x_n=A$. 由极限定义，取$\varepsilon=1$，存在N，只要$n>N$，总有

$|x_n-A|<1$.

所以，当$n>N$时，有

$|x_n|=|x_n-A+A|\leqslant|x_n-A|+|A|<1+|A|$.

但N是一个有限数，这样只要取

$M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|, 1+|A|\}$，就有

$|x_n|<M \qquad n=1, 2, \cdots$

于是$\{x_n\}$有界得证.

说明　有界只是收敛的必要条件，不是充分条件.反之，无界却是发散的充分条件，但不是必要条件. 收敛与发散、有界与无界、充分与必要之间存在着一种"对偶"性. 这种"对偶"性在方法论中很重要，用处很大，利用它可以互相"翻译"，这样就可事半功倍.

**定理4**　(绝对收敛性)　若数列$\{x_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则数列$\{|x_n|\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}|x_n|=|A|$.

证明　因为，$\Big||x_n|-|A|\Big|\leqslant|x_n-A|$，所以，

若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，则$\lim|x_n|=|A|$.

说明　此定理的直观意义是明显的，因为收敛数列发展到一定阶段，它的值与极限值的距离可无限地变小；都取绝对值后，相互之间的距离没有发生变化.但发散数列却不同，本来点与点之间的距离很远，但取绝对值后却可能很近. 例

如，$\lim\limits_{n\to\infty}|(-1)^n|=1$，但$\{x_n\}=\{(-1)^n\}$却发散，所以这个定理的逆命题不真。

**定理 5** （保号性） 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0\ (A<0)$，则对任意一个满足不等式$0<\eta<A\ (A<\eta<0)$的$\eta$，都存在正整数N，当$n>N$时，$x_n>\eta\ (x_n<\eta)$。

**证明** 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A>0$，取$\varepsilon=A-\eta>0$，由数列极限定义，必有N，当$n>N$时，总有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

从而有 $x_n>A-\varepsilon=\eta>0$。

对于$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A<0$的情况，可类似证明。

**推论** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且$A<B$，则必有N，当$n>N$时，$x_n<y_n$。

**说明** 这个性质的直观意义很明显，证明也简单，但用处很大，微积分理论中很多定理的证明，都要用到这个性质。

**定理 6** （单调性） 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，且对正整数N，当$n>N$时，有$x_n<y_n$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\leqslant\lim\limits_{n\to\infty}y_n$。

**证明** 用反证法，设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>\lim\limits_{n\to\infty}y_n$，由定理 5 的推论，必存在正整数N，当$n>N$时，$x_n>y_n$，引出矛盾，故定理得证。

**推论** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且有$N>0$，当$n>N$时，$x_n\leqslant M$，

则$\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant M$.

说明　此定理是说若 $x_n < y_n$（$n > N$时），数列$\{x_n\}$的极限值不会大于数列$\{y_n\}$的极限值，但是有可能相等。也就是说，两个数列发展的速度不同，但可能其极限值相等。

例 3　$1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{5n}$，但是

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{5n}\right)=1.$$

**定理7**　（迫敛性或夹定理）　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，且存在正整数N，当$n > N$时，有

$$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n \qquad (5)$$

则$\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$（A为常数）。

证明　因为，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，故对任给$\varepsilon > 0$，必有$N_1$，当$n > N_1$时，有

$$A-\varepsilon < x_n < A+\varepsilon. \qquad (6)$$

又因，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，对上述$\varepsilon$，必有$N_2$，当$n > N_2$时，有

$$A-\varepsilon < y_n < A+\varepsilon. \qquad (7)$$

取$N_3 = \max\{N_1, N_2, N\}$，当$n > N_3$时，不等式(5)，(6)，(7)同时成立，即

$$A-\varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < A+\varepsilon.$$

从而可得

$$A-\varepsilon < z_n < A+\varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

说明　此定理的直观意义更明显，好似赛跑，前面一个和后面一个都达到了终点，当然夹在中间的那个必定也达到终点．它反映了收敛数列之间的某种关系，这个关系为我们搞供了一种判定极限存在和求极限的方法．

以上七个基本性质，直观上比较明显，证明也很简单，但很重要，用处很多．如果说极限的 ε—N定义是整个极限的基石，那么这些基本性质就是建立在这块基石上的几根柱子，所以必须掌握．

## 二　四则运算

**定理8**　若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，且A，B为有限常数，则$\{x_n \pm y_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B$．

**证明**　因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，故对任给$\varepsilon > 0$，必有$N_1$，当$n > N_1$时，有

$$\left|x_n - A\right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (8)$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，对上述ε，必有$N_2$，当$n > N_2$时，有

$$\left|y_n - B\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

取$N = \max\{N_1, N_2\}$，当$n > N$时，不等式(8)，(9)同

时成立，由此有

$$|(x_n \pm y_n)-(A \pm B)| \leqslant |x_n - A| + |y_n - B| < \varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = A \pm B.$$

说明　这个定理告诉我们在极限存在的前提下，极限运算与加减运算的次序可以交换。从而为我们提供了一个化繁为简的求极限方法。

此定理还告诉我们，两个数列，如果其中一个收敛，另一个发散，则其代数和必发散；倘若两个数列都发散，它们的代数和又如何呢？这时该定理没有“发言权”，有可能收敛，也有可能发散。下面举例说明。

例 4　数列 $\{(-1)^n\}$ 与 $\{(-1)^{n+1}\}$ 皆发散，但它们的和 $\{(-1)^n+(-1)^{n+1}\}$ 是常数列，当然收敛。容易看出，其极限为 0。

例 5　令

$$x_n = \begin{cases} 1 & n\text{为奇数}, \\ \dfrac{2}{n+3} & n\text{为偶数}, \end{cases}$$

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{2}{n+3} & n\text{为奇数}, \\ 1 & n\text{为偶数}, \end{cases}$$

则数列 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 皆发散。因为

$$x_n - y_n = \begin{cases} \dfrac{n+1}{n+3} & n\text{为奇数}, \\ -\dfrac{n}{n+2} & n\text{为偶数}, \end{cases}$$

所以数列$\{x_n-y_n\}$发散.

**定理9** 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，且A，B为有限常数，则$\{x_ny_n\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=AB$；如果$B\neq 0$，则$\left\{\frac{x_n}{y_n}\right\}$也收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\frac{A}{B}$.

下面证明乘积的极限，先分析估计

$$|x_ny_n-AB|=|x_ny_n-Ay_n+Ay_n-AB|$$
$$\leqslant|x_ny_n-Ay_n|+|Ay_n-AB|$$
$$=|y_n||x_n-A|+|A||y_n-B|$$

又因数列$\{y_n\}$有界，从而有正数M，使$|y_n|\leqslant M$　$n=1,2,\cdots$. 故

$$|x_ny_n-AB|\leqslant M|x_n-A|+|A||y_n-B| \tag{10}$$

由此可见，要想(10)式成立，考虑到A可能为零的情形，只要增大n，使

$$|x_n-A|<\frac{\varepsilon}{2M}\text{ 且 }|y_n-B|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}.$$

**证明** 因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，故对任给$\varepsilon>0$，必有$N_1$，当$n>N_1$时，有

$$\left|x_n-A\right|<\frac{\varepsilon}{2M}, \tag{11}$$

又因$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，对上述ε，必有$N_2$，当$n>N_2$时，有

$$\left|y_n-B\right|<\frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}. \tag{12}$$

取$N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n>N$时，(11)，(12)两式同时

成立．再由(10)式可得

$$|x_n y_n - AB| \leqslant |y_n||x_n - A| + |A||y_n - B|$$
$$\leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |A| \cdot \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)} < \varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \lim_{n\to\infty} y_n = AB.$$

关于 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{A}{B}$ 的证明留给读者．

说明　这个定理只肯定了若两个数列的极限都存在，则积和商的极限等于其极限的积和商，在商的情况下还要求分母的极限不为零．如果两个数列中有一个发散，其积与商是否收敛？如若收敛，其极限又是什么？上述定理不能作出任何肯定的回答．下面举例说明．

例 6　设 $x_n = (-1)^n$，$y_n = \frac{(-1)^n}{n}$，则 $\{x_n\}$ 发散而 $\{y_n\}$ 收敛．但其积 $\{x_n y_n\}$ 收敛，

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{(-1)^n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0.$$

例 7　设 $x_n = (-1)^n$，$y_n = (-1)^n \cdot 2$，虽然 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 都发散，但

$$\lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} [(-1)^n \cdot (-1)^n \cdot 2] = 2.$$

定理 8 与定理 9 也没有回答两个数列中至少有一个是无穷大量时的情况，读者可举些例子自行考察一下．

# §4　极限论的基本定理及其等价性

上一节根据极限的定义讨论了收敛数列的一些基本性质和运算规则．在应用这些性质时，必须事先知道或假定其极限存在．那么，又如何判定一个数列收敛与发散呢？本节将围绕这个中心问题，介绍有关极限论的八个基本定理．并通过这些定理的证明，介绍极限论中一些典型的论证方法．

## 一　狄德金分割原理

首先介绍有关分割概念．

所谓有序集合D的一个狄德金分割，就是将D中的元素分成两个子集X和Y，且满足下列条件：

(i)　X与Y都不空；

(ii) 对任一个$x\in D$，必有$x\in X$而$x\notin Y$，或$x\in Y$而$x\notin X$；换言之，$X\cap Y=\phi$；

(iii)每一个属于X的元素小于Y中的所有元素．

称X为D的前段（下部），Y为D的后段（上部），且将D的分割记为

$$(X,\ Y).$$

从逻辑上讲，对D的任一个分割（X，Y），有下列四种情况

X有最大元素，Y有最小元素；

X有最大元素，Y无最小元素；

X无最大元素，Y有最小元素；

X无最大元素，Y无最小元素.

现在我们假定D代表自然数集. 显然对自然数集，满足上述条件的任何一个分割，必属于第一种情况，即前段X中必有最大数，后段Y中必有最小数. X中的最大数与Y中的最小数之间必然有一段距离，所以人们将这种情况称为有间隔.

我们再假定D代表有理数集. 因为任何两个有理数之间必有无穷多个有理数，所以对有理数集的任何一个分割（X，Y），绝不可能出现第一种情况. 也就是说对有理数集的任一个分割（X，Y），绝不会在X与Y之间出现间隔. 那么，其它情况又如何呢？这要具体分析，比如将所有大于2的有理数划归后段Y中，其余划归前段X中，这时2为X中最大数，Y无最小数，即属于第二种情况. 倘若其它均不变仅将2从X中"调"到Y中，显然此时X中，无最大数，而Y中却有最小数，且为2，即属于第三种情况. 若以无理数$\sqrt{2}$为界，即将所有小于$\sqrt{2}$的有理数划归X中，其余的（即所有大于$\sqrt{2}$的）划归Y中，这时X中无最大数，Y中也无最小数. 因而属于第四种情况. 人们将这种情况称为有"空隙". 具体地说，尽管前段X与后段Y之间没有间隔，但还没有连通而有空隙.

如果数集D的任何一个分割（X，Y），既不会出现间隔，即第一种情况；又不会出现空隙，即第四种情况，而只能是第二种情况或第三种情况，人们称具有这样性质的数集

D是完备的或连续的。下面的狄德金（Dedekind）分割原理告诉我们，全体实数集具有这样的性质。

**公理**（狄德金分割原理） 全体实数R的任何一个分割（X，Y），只能是要么X有最大数，Y无最小数；要么X无最大数，Y有最小数，即对R的任何一个分割（X，Y），必存在唯一的介数$\alpha\in R$，使得对任意的$x\in X$，$y\in Y$，有

$$x\leqslant\alpha<y \quad 或 \quad x<\alpha\leqslant y.$$

**评注** （i）这个公理的直观意思是明显的，即在数轴上任切一刀，其切口必然是一个实数（读者注意有理数集不具备这一性质），因而它反映了实数系的连续性。历史上曾用有理数集的分割来定义无理数，人们称它为定义无理数的“狄德金分割法”。

（ii）由于我们不能在这里详细地讨论实数理论。因此，把这条反映实数连续性（完备性）的性质当作公理承认，作为推证其它定理的出发点。

## 二 确界原理

**定义1**（上方有界） 设D为一个非空数集，如果存在实数M，使得对任何$x\in D$，有

$$x\leq M,$$

则称数集D上方有界，M称为数集D的一个上界。

类似地，设D为一个非空数集，如果存在实数m，使得对任何$x\in D$，有

$$x\geqslant m,$$

则称数集D下方有界，m称为数集D的一个下界。

倘若一个数集D既是上方有界，又是下方有界，则称数集D是有界集．

如果一个数集有上（下）界，它的上（下）界不是唯一的．因为凡是比上界大的数均为它的上界；凡是比下界小的数均为它的下界．其中最小的上界与最大的下界类似于物理学中的临界值，具有独特的意义，因此我们必须考察这种最小上界与最大下界的存在性及其性质与作用．

**定义 2** 如果非空数集D有最小上界M，也就是说M具有性质：

（i） M是D的上界，即对任何$x\in D$，有

$$x\leqslant M;$$

（ii） M是D的上界中最小者，即对任给$\varepsilon>0$，总存在$x\in D$，使得

$$M-\varepsilon<x\leqslant M.$$

则称此最小上界M为数集D的上确界，记作supD，即

$$M=\sup D.$$

类似地，如果非空数集D有最大下界m，也就是说m具有性质：

（i） m是D的下界，即对任何$x\in D$,有

$$m\leqslant x;$$

（ii） m是D的下界中最大者，即对任给$\varepsilon>0$，总存在$x\in D$，使得

$$m\leqslant x<m+\varepsilon.$$

则称此最大下界m为数集D的下确界．记作infD即

$$m=\inf D.$$

例 1　设数集 $D=\left\{\frac{1}{n}\middle| n=1, 2, 3\cdots\cdots,\right\}$. 由D的定义可以验证1是D的最小上界，即上确界，且属于D。零是D的最大下界，即下确界，但不属于D.

例 2　数集 $D=\{x \mid x<0\}$ 显然无下界，因而更无下确界，零是D的上确界，但并不属于D.

例 3　数集 $D=\{x \mid x\in(a,b)\}$，即D是开区间 $(a, b)$. 可以验证a为D的下确界，b为D的上确界，然而a与b均不属于D.

例 4　数集 $D=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\middle| n=1, 2, 3, \cdots\right\}$，

即D是无穷数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$. 显然，$-1$是D的下确界，$\frac{1}{2}$是D的上确界，且二者均属于D.

从以上几个例子可以看出，一个数集的确界可以属于这个集合，也可以不属于这个集合. 倘若上（下）确界属于这个集合，则此上（下）确界就是该数集的最大（小）值.

下面我们来证明有关数集的上（下）确界的存在定理.

**定理 1**　（确界存在定理）　如果数集D有上（下）界，则D必有唯一的上（下）确界.

证明　先证若D有上界，则必有上确界.

首先，根据确界的定义可知，若D有最大值M，则M就是D的上确界. 因此，凡有限数集都有上确界. 这样，仅须对D为无限集且无最大值的上有界情况加以证明. 作实数集R的分割（X，Y），其中Y为D的一切上界的集合，X为其余实数的集合. 下面我们来验证分割（X,Y）满足狄德金分

割的三个条件：

(i) X与Y非空是显然的.

(ii) 根据分割(X, Y)的作法，$X\cap Y=\phi$也是显然的.

(iii) 任取X中一数$x$，如果有Y中的一数$y$，使得$x\geqslant y$，则$x$成为D的一个上界，于是$x\in Y$，这与(ii)矛盾. 因此，X中的任何数都小于Y中的所有数.

由于上述分割是一个狄德金分割，由分割公理必有唯一的介数$\alpha\in R$，使得对任意$x\in X$，$y\in Y$，有

$$x\leqslant\alpha<y \quad 或 \quad x<\alpha\leqslant y.$$

又因，$\alpha$不可能是X的最大值(否则$\alpha$就成为D的一个上界从而又属于Y)，因此，$x\leqslant\alpha<y$不可能成立. 这样，只有$x<\alpha\leqslant y$，即$\alpha$是Y的最小值，也就是D的上界中最小者. 故D有上确界.

类似地，可以证明若D有下界，则必有下确界.

当然，没有上(下)界的数集D是谈不上有(有限)上(下)确界的. 不过，今后在某些场合，为了方便起见，当数集D没有上(下)界时，我们把符号$+\infty$($-\infty$)也算作D的上(下)确界，并记作

$$\sup D=+\infty\ (\inf D=-\infty).$$

这样一来，我们对任何数集都可以谈论其上(下)确界了.

**评注** (i)确界定理同样反映了实数集的连续性(有理数集就不具备这个性质，比如$\sqrt{2}$的不足近似值数列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots$$

虽然有上界，但其上确界为$\sqrt{2}$却不在有理数集中).

(ii) 确界定理不仅在数学分析中，而且在整个函数论

中都起着重要的作用，特别在有关构造性的证明中表现得更为突出。

(iii) 确界定理正是从量的侧面刻划了物质变化中的转折点与临界点。例如在标准气压下100℃就是由水转化为蒸气的临界点，即水的温度的上确界。而0℃则是由水转化为冰的临界点，即水的温度的下确界。这也正是确界定理之所以重要的物质基础。

**推论** 若数集有界，则存在一个长度最小的闭区间$[m, M]$（其中$M=\sup D$，$m=\inf D$），使得任何$x\in D$，有

$$m\leqslant x\leqslant M.$$

**例5** 若数列$\{x_n\}$、$\{y_n\}$有界，则

(i) $\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$；

(ii) 若$x_n\geqslant0$，$y_n\geqslant0$（$n=1, 2, 3\cdots\cdots$），则

$$\inf\{x_n\cdot y_n\}\geqslant\inf\{x_n\}\cdot\inf\{y_n\}.$$

证明(i) 因$x_n+y_n\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$，可见，常数$\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}$为数列$\{x_n+y_n\}$的上界，由上确界定义，便有

$$\sup\{x_n+y_n\}\leqslant\sup\{x_n\}+\sup\{y_n\}.$$

(ii) 因$x_n\geqslant0$，$y_n\geqslant0$，所以$\inf\{x_n\}$和$\inf\{y_n\}$是两个非负常数，由下确界的定义知

$$x_n\geqslant\inf\{x_n\},\quad y_n\geqslant\inf\{y_n\},$$

从而有

$$x_n\cdot y_n\geqslant\inf\{x_n\}\cdot\inf\{y_n\},$$

这表明定数$\inf\{x_n\}\cdot\inf\{y_n\}$是数列$\{x_ny_n\}$的一个下界，由下确界的定义知

$$\inf\{x_ny_n\}\geqslant\inf\{x_n\}\inf\{y_n\}.$$

## 三　单调有界原理

**定义 3**　（单调有界数列）如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

（i）　对任何$n$，有$x_n \leqslant x_{n+1}$；

（ii）　存在实数$M$，对任何$n$，$x_n \leqslant M$.

则称数列 $\{x_n\}$ 单调上升（或单调递增）且有界.

类似地，如果数列 $\{x_n\}$ 满足条件：

（i）　对任何$n$，有$x_n \geqslant x_{n+1}$；

（ii）　存在实数$m$，对任何$n$，$x_n \geqslant m$.

则称数列 $\{x_n\}$ 单调下降（或单调递减）且有界.

**定理 2**　（单调有界原理）单调有界数列必有有限极限.

为了确定起见，不妨只讨论单调上升有界数列的极限存在问题. 首先我们从数轴上可以看出（图 4—1），对应于单调上升数列的点$x_n$，只能向X轴的正方向移动. 因此，仅有如下两种情况：




图 4—1

（i）　点$x_n$可以超越任何一个正数$M$而趋向无穷远，即当$n \to \infty$时，$x_n \to +\infty$；

（ii）　$x_n$趋向于某一个定点$A$.

因为 $\{x_n\}$ 有界，所以第一种情况不可能出现. 这样，只能是第二种情况. 因此，这个定理的直观意义是明显的.

证明　设 $\{x_n\}$ 单调上升且有界，即

$x_n \leqslant x_{n+1}$且$x_n \leqslant M$（$M$为常数），$n = 1, 2, 3, \cdots$

根据确界存在定理，$\{x_n\}$ 必有上确界. 设其上确界为 $A$，即

$$\sup\{x_n\}=A.$$

现证明，$A$ 就是 $\{x_n\}$ 的极限，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sup\{x_n\}=A.$$

事实上，由上确界定义知，对任给 $\varepsilon>0$ 必存在 $N$，使得

$$A-\varepsilon<x_N\leqslant A, \tag{1}$$

再根据 $\{x_n\}$ 单调上升及有界可知，对任何 $n>N$，有

$$x_N\leqslant x_n\leqslant A, \tag{2}$$

(1)，(2)两式联合可得

$$A-\varepsilon<x_N\leqslant x_n\leqslant A<A+\varepsilon,$$

即当 $n>N$ 时有

$$|x_n-A|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A,$$

同法可证，单调下降有界数列的极限也存在，且其极限就是它的下确界.

**推论** 若 $\{x_n\}$ 单调上升，但无界，则

$$\lim x_n=\sup\{x_n\}=+\infty;$$

若 $\{x_n\}$ 单调下降，但无界，则

$$\lim x_n=\inf\{x_n\}=-\infty.$$

**评注** 本定理为我们提供了判定一个数列极限存在的充分条件，即对任何一个单调有界数列，可以断定其极限必存在. 因此它在一定的范围内就可以避免直接按定义验证数列

的收敛性．因为有的数列即使收敛，但其极限可能是我们从来未见过的数．这样直接用定义来验证收敛性往往行不通．

例 6　试判定数列

$$\sqrt{2},\ \sqrt{2\sqrt{2}},\ \sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}},\ \cdots,$$

$$\underbrace{\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}}_{n\text{重根号}}\cdots,$$

收敛，并求其极限值．

首先，只要我们能证明此数列单调有界，就可断定其极限必存在．

因为，$x_n=\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\cdots\sqrt{2}}}}$

$$=2^{\frac{1}{2}}\cdot 2^{(\frac{1}{2})^2}\cdot 2^{(\frac{1}{2})^3}\cdot\cdots\cdot 2^{(\frac{1}{2})^n}$$

$$=2^{\frac{1}{2}+(\frac{1}{2})^2+\cdots+(\frac{1}{2})^n}$$

$$=2^{1-(\frac{1}{2})^n},$$

所以

$$x_n=2^{1-(\frac{1}{2})^n}<2^{1-(\frac{1}{2})^{n+1}}=x_{n+1},\ n=1,2,3\cdots$$

即 $\{x_n\}$ 单调上升．又因 $x_n<2$，$n=1,2,3,\cdots$ 故 $\{x_n\}$ 有界． 根据单调有界原理可以断定 $\{x_n\}$ 的极限存在．

其次，求极限值．设其极限值为 $A$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

因为

$$x_{n+1}=\sqrt{2x_n},$$

由极限唯一性，两边取极限，便有

$$A=\sqrt{2A} \quad 或 \quad A^2-2A=0.$$

解得 $A=2$ 或 $A=0$，但 0 不是 $\{x_n\}$ 的极限，所以

$$A=2,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n=2.$$

## 四 闭区间套原理

**定理 3** （闭区间套原理） 若闭区间序列 $[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, $[a_3, b_3]$, …, $[a_n, b_n]$, …满足条件

（i） 每一个闭区间都包含它的后继，即

$$[a_{n+1}, b_{n+1}]\subset[a_n, b_n], \quad n=1,2,3,\cdots$$

（ii） 区间的长度趋于零，即

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0.$$

则必存在唯一的实数 $c$，属于所有闭区间，即

$$c\in[a_n, b_n], \quad n=1, 2, 3,\cdots$$

证明 存在性 由条件(i)知数列

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots$$

单调上升且有界，故 $\{a_n\}$ 的极限存在， 设其极限为 $A$，即

$$\lim_{n\to\infty} a_n=\sup\{a_n\}=A\geqslant a_n, \quad n=1,2,3,\cdots \quad (3)$$

又因，所有 $b_n$ 皆是 $\{a_n\}$ 的上界，而 $A$ 又是 $\{a_n\}$ 的最小上界，故有

$$A\leqslant b_n \qquad n=1, 2, 3\cdots \quad (4)$$

(3)，(4)两式联合得

$$a_n \leqslant A \leqslant b_n, \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

或

$$A \in [a_n, b_n], \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

唯一性　若还有实数$B$，使得

$$B \in [a_n, b_n], \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

则

$$0 \leqslant |A-B| \leqslant b_n - a_n, \qquad n=1, 2, 3, \cdots$$

又因

$$\lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = 0,$$

所以

$$A = B.$$

从而唯一性得证。

**评注**　(i)　本定理的直观几何意义是：倘若一个闭区间序列，其中每一个都包含它的后继，且这些闭区间的长度所构成的数列以零为极限．那么，必有且仅有一个点是这些区间的公共点．因此，闭区间套定理就反映了数轴上布满了点，即没有空隙．

(ii)　闭区间套原理是分析学中证明很多定理的一个强有力的工具．它的主要特点是将整体问题划归到某一点的任意近旁．这样既作到了“化整为零”，又利于极限方法的运用．

(iii)　必须注意，如若把闭区间改为开区间，定理的结论不一定成立，例如开区间序列

$$(0, 1), \left(0, \frac{1}{2}\right), \cdots, \left(0, \frac{1}{n}\right), \cdots$$

显然有

$$(0, 1)\supset\left(0, \frac{1}{2}\right)\supset\cdots\supset\left(0, \frac{1}{n}\right)\supset\cdots$$

且

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}-0\right)=0,$$

但任何实数都不属于上述所有的开区间。事实上，公共点不可能是负数或零，此外任何实数 $c>0$，总有$\frac{1}{n}<c$，使得 $c\notin\left(0, \frac{1}{n}\right)$，故也不可能为其公共点。

## 五　波雷尔有限覆盖定理

先介绍区间覆盖概念：

设$D$为一区间集合，$E$是一个点集，若对$E$的任一点$C$，在$D$中必存在一个区间$\varDelta$，使得$C\in\varDelta$，则称$D$覆盖$E$。例如

$$D=\left\{[1, 2], \left[0, \frac{1}{2}\right), \left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, \frac{n}{n+1}\right), \cdots\right\}$$

覆盖$E=[0, 2]$。

又如，$D=\left\{\left(0, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right), \cdots, \left(\frac{n-1}{n}, \frac{n+1}{n+2}\right), \cdots\right\}$覆盖$E=(0, 1)$。

**定理4** （波雷尔Borel有限覆盖定理） 若 $D$是一个开区间集合，且$D$覆盖一个有界闭区间$E=[a, b]$，则$D$中必存在有限个开区间覆盖$[a, b]$。

证法1　设$[a, b]$不可能被$D$中任何有限个开区间覆盖。那么，将$[a, b]$等分为两个区间，则其中至少有一个区间不能被$D$中任何有限个开区间覆盖，把这个区间记为

$$[a_1, b_1].$$

再等分$[a_1, b_1]$，同样至少有一个不能被$D$中任何有限个开区间覆盖，将此区间记为

$$[a_2, b_2].$$

照此继续作下去，便得到一个闭区间序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

这些闭区间满足下列三个条件：

(i)　任一个$[a_n, b_n]$都不能被$D$中任何有限个开区间覆盖；

(ii)　$[a, b]\supset[a_1, b_1]\supset\cdots\supset[a_n, b_n]\supset\cdots$；

(iii)　$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b-a}{2^n} = 0$.

由上条件(ii)与(iii)，根据闭区间套原理，则必有唯一实数$A$，使得

$$A\in[a_n, b_n]\subset[a, b], \quad n = 1, 2, 3, \cdots$$

且

$$\lim a_n = \lim b_n = A.$$

由定理的条件得知，在$D$中至少存在一个开区间，不妨设为$(\alpha, \beta)$，使得

$$A\in(\alpha, \beta) \quad 即 \quad \alpha< A<\beta.$$

由数列极限的性质得知，必存在一个正整数$N$，当$n>N$时，有

$$\alpha<a_n<b_n<\beta,$$

即当$n>N$时，有

$$[a_n, b_n] \subset (\alpha, \beta).$$

这就是说用$D$中一个区间$(\alpha, \beta)$就可覆盖形如$[a_n, b_n]$ $(n>N)$的区间，显然这与条件(i)矛盾，从而定理得证.

证法 2　这里我们根据确界存在原理给出一个证明方法.

首先，构造一个数集

$$X^* = \left\{ x^* \,\middle|\, \begin{array}{l} x^* \in [a, b] \text{且} [a, x^*] \text{能被} D \\ \text{中有限个开区间所覆盖.} \end{array} \right\}.$$

其次，证明$X^*$具有以下性质：

(i)　$X^*$非空.

这是因为，对点$a$必存在一个开区间$\Delta_0 = (\alpha_0, \beta_0) \in D$，覆盖$a$，即

$$a \in (\alpha_0, \beta_0) \text{或} \alpha_0 < a < \beta_0,$$

于是，$a$与$\beta_0$之间的所有数都属于$X^*$.

(ii)　$\sup X^* = c \leqslant b$.

因为$x^* \leqslant b$，故根据确界存在定理必有

$$\sup X^* = c \leqslant b.$$

(iii) $\sup X^* = c \in X^*$.

事实上，因$c \in [a, b]$，所以必存在开区间，设为$\Delta_n = (\alpha_n, \beta_n) \in D$覆盖$c$，即

$$c \in (\alpha_n, \beta_n) \text{或} \alpha_n < c < \beta_n,$$

又因$c$是$X^*$上界中最小者，所以必有$x^* \in X^*$，使得

$$\alpha_n < x^* < c,$$

由于$[a, x^*]$被$D$中有限个开区间覆盖，设这些开区间为

$$\Delta_0=(a,\ \beta_0),\ \Delta_1=(\alpha_1,\ \beta_1),\ \cdots,\ \Delta_{m-1}=(\alpha_{m-1},\ \beta_{m-1}),$$

那么，再加一个开区间$\Delta_n=(\alpha_n,\ \beta_n)$，即

$$\Delta_0=(\alpha_0,\ \beta_0),\ \Delta_1=(\alpha_1,\ \beta_1)\cdots\Delta_{m-1}=(\alpha_{m-1},\ \beta_{m-1}),\ \Delta_n=(\alpha_n,\ \beta_n)$$

必然能覆盖$[a,c]$，故$\sup X^*=c\in X^*$。

(iv) $\sup X^*=c=b$。

事实上，如若$c<b$，则在开区间$(c,\ \beta_n)$中还有$X^*$的点$x^*$，这样$c$就不是$X^*$的上确界，所以只有$c=b$。

最后，由于$c=b\in X^*$，故$[a,b]$能被$D$有限覆盖得证。

**评注** (i) 有限覆盖定理揭示了有界闭区间$[a,\ b]$的一个本质属性，叫做紧性，在数学分析中特别是涉及到连续性概念时起着重要作用。

(ii) 在此定理中被覆盖的是一个有限闭区间，而覆盖的是开区间，这些条件都很重要。如若被破坏，命题可能失真，比如

$$D=\left\{\left(0,\ \frac{2}{3}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right),\cdots,\left(\frac{n-1}{n},\ \frac{n+1}{n+2}\right),\ \cdots\right\}$$

虽然覆盖$E=(0,1)$，但$D$中任何有限个开区间都盖不住$E=(0,\ 1)$。

## 六 维尔斯特拉斯聚点原理

**定义4** 设$D$是数轴上的一个点集，$x_0$是数轴上的一定点，若$x_0$的任何邻域都包含有$D$的无穷多个点，即对任给$\delta>0$，区间$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$中都有$D$的无穷多个点，则

称$x_0$是$D$的一个聚点。

**定义5** 设$x_0$是点集$D$的一个点，若存在$x_0$的一个邻域，它不包含$D$中异于$x_0$的任何一点，则称$x_0$是$D$的一个孤立点。

例7 设$D=\left\{\frac{1}{n}\middle| n=1, 2, 3, \cdots\right\}$，则$x=0$是$D$的唯一聚点，但0不属于$D$，而$D$中的每一点都是它的孤立点。

例8 设$D$是由全体整数构成的点集，显然$D$无聚点且$D$的每一个点都是它的孤立点。

例9 若$D$是闭区间$[a, b]$，则$D$的每一点都是它的聚点；若$D$是开区间$(a, b)$，则$(a, b)$中的点及$a, b$皆是$D$的聚点，但$a, b\notin D$。

由定义及以上的例子可以看出：

(i) 点集$D$的每一个点或为聚点，或为孤立点；

(ii) 有限点集没有聚点；

(iii) 一个无限点集可能有聚点，也可能没有聚点；

(iv) 点集$D$的孤立点必属于$D$；

(v) 点集$D$的聚点可能属于$D$，也可能不属于$D$。

**定理5** （聚点原理） 任何有界无穷点集都有聚点。

首先，看看这个原理的直观意义：设$D$是有界无穷点集，则$D$的所有点必包含在一个有限区间$[a, b]$之中，在这有限长的线段上要分布$D$的无限个点，自然至少有一个点$x_0\in[a, b]$，使得在$x_0$的任意近傍必凝聚$D$的无限个点。

**证法1** 设$D$为有界无穷点集，由定理1的推论知，必有最小闭区间$[a, b]$存在，使得

$$D \subset [a, b].$$

如果$D$无聚点，则对任何$x \in [a, b]$，有邻域$U(x, \delta)$（开区间$(x-\delta, x+\delta)$），存在，使得$U(x, \delta)$中至多有$D$的有限个点，即

$$U(x, \delta) \cap D \tag{5}$$

是有限集，显然所有这些邻域可以覆盖$[a, b]$，即

$$[a, b] \subset \bigcup_{x \in [a, b]} U(x, \delta)$$

根据有限覆盖定理，必存在有限个邻域，比如

$$U(x_1, \delta_1),\ U(x_2, \delta_2),\ \cdots,\ U(x_n, \delta_n)$$

盖住$[a, b]$，即

$$[a, b] \subset \bigcup_{i=1}^{n} U(x_i, \delta_i),$$

又因点集$D$可以表示为

$$D = D \cap [a, b] = \bigcup_{i=1}^{n} D \cap U(x_i, \delta_i)$$

因此由(5)知$D$为有限集与题设矛盾，故$D$必有聚点得证。

证法2　设$D$为一个有界无穷点集，$b_1$，$a_1$分别为其上、下确界，则$D \subset [a_1, b_1]$，因此$[a_1, b_1]$中含有$D$的无穷多个点，将$[a_1, b_1]$等分，那么其中至少有一个含有$D$的无穷多个点，把具有此性质的区间用$[a_2, b_2]$表示，则

$$[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2]$$

且　$b_2 - a_2 = \dfrac{b_1 - a_1}{2}$，

重复这一步骤，便可作出一个闭区间序列

$[a_1, b_1]$, $[a_2, b_2]$, …, $[a_n, b_n]$, …

且满足下列条件：

(i) 每一个$[a_n, b_n]$中皆有$D$的无穷多个点；

(ii) $[a_1, b_1] \supset [a_2, b_2] \supset \cdots \supset [a_n, b_n] \supset \cdots$；

$$(iii)\quad \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1 - a_1}{2^{n-1}} = 0,$$

于是由闭区间套原理知，必存在唯一的实数$c$，使得

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

现证明$c$就是$D$的一个聚点.

事实上，由$\lim\limits_{n\to\infty}a_n = \lim\limits_{n\to\infty}b_n = c$，得知对任给$\delta > 0$，存在$N$，当$n > N$时，有

$$c - a_n < \delta, \quad b_n - c < \delta,$$

即

$$[a_n, b_n] \subset (c - \delta, c + \delta).$$

又因，$[a_n, b_n]$中含有$D$的无穷多个点，所以$(c-\delta, c+\delta)$更含有$D$的无穷多个点，故$c$是$D$的聚点得证.

推论　若数集$D$的上、下确界都存在，但不属于$D$，则它必是$D$的聚点.

证明　设$A$是数集$D$的上确界，即对任给$\varepsilon > 0$，必有$x_0 \in D$，使得

$$x_0 \in (A - \varepsilon, A)$$

或

$$A - \varepsilon < x_0 < A.$$

下面证明在开区间$(x_0, A)$中，包含有$D$的无穷多个点．反设在该区间中仅有$D$的有限个点，设为

$x_1, x_2, \cdots x_n$.

显然，这有限个点到$A$的距离必有一个最小者，设此点为$x_k$（$1\leqslant k\leqslant n$），这样$x_k$便成了$D$的上确界且属于$D$，由此矛盾得知（$x_0$，$A$）中必含有$D$的无穷多个点，又因为

$$(x_0,\ A)\subset(A-\varepsilon,\ A)\subset(A-\varepsilon,\ A+\varepsilon),$$

所以，对任给$\varepsilon>0$，在开区间（$A-\varepsilon$，$A+\varepsilon$）中，总有$D$的无穷多个点．于是，$A$是$D$的聚点得证．

**评注** 聚点原理从另一个侧面刻划了实数集$R$的连续性，它是连续性区别于离散性的一个重要标志．

这个原理的特点是将整体的无穷性归结为局部范围内的无穷性．

## 七 列紧性（致密性）定理

极限性质告诉我们，收敛数列必有界，但有界数列未必都收敛．对于任何有界且收敛的数列来说，它的任何子列都收敛，且极限相同，但若一个有界数列是发散的，那么它是否仍存在收敛子列呢？下面列紧性定理对此问题作了肯定的回答．

**定理6** （列紧性定理） 任何有界无穷数列必有收敛子列．

**证明** 首先，如果数列$\{x_n\}$是由有限个数重复出现而构成的，则这有限个数中至少有一个数，比如说是数$c$要重复出现无限多次，设$c$重复出现的项数为

$$n_1, n_2\cdots, n_k, \cdots \qquad k=1, 2, 3, \cdots$$

从而

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ \cdots,\ x_{n_k},\ \cdots \qquad k=1,2,3,\cdots$$

的极限 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=c$. 因此，$\{x_{n_k}\}$就是$\{x_n\}$的一个收敛子列.

其次，如若数列$\{x_n\}$确由无穷多个不同的数组成。那么，由此数列所构成的点集必然是一个无穷点集. 根据聚点原理，$\{x_n\}$至少有一个聚点，设$c$是它的一个聚点. 下面我们在数列$\{x_n\}$中选出一个子列$\{x_{n_k}\}$，使其收敛于$c$，其具体做法如下：

因为$c$是$\{x_n\}$的聚点，所以对任何$k$，在$\left(c-\frac{1}{k},\ c+\frac{1}{k}\right)$中，必含有$\{x_n\}$的无穷多个项. 从而在区间，$\left(c-\frac{1}{k}, c+\frac{1}{k}\right)$中可以选出$\{x_n\}$的一个项$x_{n_k}$，使得

$$x_{n_k}\neq c.$$

由于$k$是任意自然数，这样我们就可得到$\{x_n\}$的一个子列$\{x_{n_k}\}$，又因$x_{n_k}\in\left(c-\frac{1}{k},\ c+\frac{1}{k}\right)$，即

$$\left|x_{n_k}-c\right|<\frac{1}{k}, \qquad k=1,\ 2,\ 3,\cdots$$

当$k\to\infty$时，$\frac{1}{k}\to 0$，所以，$\lim x_{n_k}=c$，从而定理得证.

**评注** 列紧性定理同有限覆盖定理一样，它们都刻划了有界无穷集合的一个本质属性，同时它也和区间套定理一样，是极限论中论证和推理的一个强有力的工具. 它虽然不如闭区间套定理那样直观明显，但是以它为根据的“抽子列”的方法却比闭区间套定理用起来灵活，应用领域也比较广.

当数列$\{x_n\}$无界例如$\{x_n\}=\{n^2\}$时，显然上述命题不真。但也有类似的性质，它刻划了无界数列的特征。

**定理6**　若数列$\{x_n\}$无界，则必存在子列，$\{x_{n_k}\}$，使得

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty.$$

证明　因$\{x_{n_k}\}$无界，故对任何实数$M>0$，至少存在一个自然数$n_k$，使得

$$|x_{n_k}|>M.$$

先取$M=1$，必存在一个$n_1$，使得

$$|x_{n_1}|>1,$$

再取$M=2$，在$n_1$之后必存在一个$n_2$，使得

$$|x_{n_2}|>2,$$

又取$M=3$，在$n_2$之后必存在一个$n_3$，使得

$$|x_{n_3}|>3,$$

……………………………

这样，便得到数列

$$n_1<n_2<n_3<\cdots<n_k<\cdots$$

与数列

$$x_{n_1},\ x_{n_2},\ x_{n_3},\ \cdots,\ x_{n_k},\ \cdots$$

使得

$$|x_{n_k}|>k,\qquad k=1,2,3,\cdots$$

故

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k}=\infty.$$

如若$\{x_n\}$无上界，则有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = +\infty;$$

同样，若 $\{x_n\}$ 无下界，则有

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = -\infty.$$

## 八　柯西收敛准则

从前面关于极限定义的分析可看出，一个数列 $\{x_n\}$ 收敛到有限极限，它越到后来变化越微小，这个特点是收敛数列的本质属性。此性质通过下面一个定理反映出来。

**定理 7**　（柯西收敛准则）　数列 $\{x_n\}$ 收敛到有限极限的充要条件是：对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 $N$，当 $m$，$n>N$ 时，有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon.$$

证明　必要性　因数列 $\{x_n\}$ 收敛，设其极限为 $A$，即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A,$$

则对任给 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n>N$ 时，有

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是，如果 $m$，$n>N$，则

$$|x_m - x_n| = |x_m - A + A - x_n|$$

$$\leqslant |x_m - A| + |x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

从而必要性得证。

充分性　根据条件，取 $\varepsilon = 1$，存在 $N$，当 $m$，$n>N$ 时，有

$$|x_m - x_n| < 1,$$

但 $$|x_n| = |x_n - x_{N+1} + x_{N+1}|$$

$$\leqslant |x_m - x_{N+1}| + |x_{N+1}| < 1 + |x_{N+1}|,$$

取

$$M = \max\{|x_1|, |x_2|, \cdots, |x_N|, (1 + |x_{N+1}|)\}$$

因此

$$|x_n| \leqslant M, \qquad n = 1, 2, 3, \cdots$$

故 $\{x_n\}$ 有界，根据列紧性定理必有收敛子列 $\{x_{n_k}\}$，设其极限为 A，即

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = A.$$

从而对任给 $\varepsilon > 0$，存在正整数 $K$，当 $k > K$ 时，有

$$\left| x_{n_k} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

令 $N_1 = n_K$，又因当 $k > K$ 时，必有

$$n_k > n_K = N_1,$$

因此，对任给 $\varepsilon > 0$，存在 $N_1$，当 $n_k > N_1$ 时，有

$$\left| x_{n_k} - A \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (6)$$

再由定理条件知，对此 $\varepsilon > 0$，存在 $N_2$，当 $n$，$n_k > N_2$ 时，有

$$\left| x_n - x_{n_k} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (7)$$

取

$$N = \max\{N_1, N_2\},$$

则当 $n$，$n_k > N$ 时，(6)，(7)两式都成立，从而有

$$|x_n - A| = |x_n - x_{n_k} + x_{n_k} - A|$$

$$\leqslant |x_n - x_{n_k}| + |x_{n_k} - A|$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

故有$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，从而充分性得证。

**评注** ($i$) 单调有界原理仅是数列收敛的一个充分条件，因此有它的局限性。然而柯西准则不仅是数列收敛的充分条件而且还是必要条件，所以柯西准则也可作为收敛数列的等价定义。同时柯西准则作为收敛数列的定义最大的优点是：它不要求事先知道极限，而只涉及到数列本身。

($ii$) 满足柯西准则条件的数列，通常人们称它为基本数列。康托（Cantor）等人曾用有理数的基本数列等价类来定义实数。

($iii$) 有时为应用方便可将柯西准则陈述为：数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是

对任给$\varepsilon > 0$，必存在正整数$N$，当$n > N$时，有

$$|x_{n+p} - x_n| < \varepsilon, \qquad p = 1, 2, 3, \cdots$$

这两种陈述方式是等价的，但在不同情况下各有自己的方便之处。

($iV$) 既然柯西准则可以作为收敛数列的定义，那么，它的否定当然也可以作为发散数列的定义，即数列$\{x_n\}$发散，是指

存在$\varepsilon_0 > 0$，对任意正整数$N$，有正整数$m_N$，$n_N$存在，尽管$m_N$，$n_N > N$，但

$$|x_{m_N} - x_{n_N}| \geqslant \varepsilon_0.$$

以上介绍的这八个定理，人们称它们为极限论的基本定

理．通过对这些定理的论证，我们看到它们之间有紧密的内在关系．下面我们进一步证明它们还是相互等价的．

这里我们将采用一种循环论证的方法．因此，由上面推证这些定理的逻辑顺序可知，欲证这些定理是等价的，只要能再证明以柯西收敛准则为前提可以推出狄德金分割原理．如若能作到这一点，那么这八个定理的论证就构成了一个逻辑循环．这样，它们之间任何两个都可以互相推出，从而等价性得证．

下面我们就以柯西收敛准则为前提来证明狄德金分割原理．

**定理 8** （狄德金分割原理） 全体实数$R$的任何一个分割都有一个介点，即对$R$的任何一个分割（$X$，$Y$），必存在一个$a\in R$，使得对任何$x\in X$，$y\in Y$，有

$$x\leqslant a<y \quad \text{或} \quad x<a\leqslant y.$$

**证明** 对全体实数$R$的任何一个狄德金分割（X，Y），因$X$，$Y$非空，任取$a_1\in X$，$b_1\in Y$，则$b_1>a_1$．将〔$a_1$，$b_1$〕等分为二，如若分点$\frac{a_1+b_1}{2}\in X$，取右半区间为〔$a_2$，$b_2$〕；如若$\frac{a_1+b_1}{2}\in Y$取左半区间为〔$a_2$，$b_2$〕，总之，$a_2\in X$，$b_2\in Y$．如此无限继续作下去，可得闭区间序列｛〔$a_n$，$b_n$〕｝，且满足下列条件：

（i） $[a_1, b_1]\supset[a_2, b_2]\supset\cdots\supset[a_n, b_n]\supset\cdots$；

（ii） $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{b_1-a_1}{2^{n-1}}=0$；

（iii） $a_n\in X$，$b_n\in Y$，  $n=1, 2, 3, \cdots$．

由条件$(i)$、$(ii)$，根据柯西收敛准则，数列

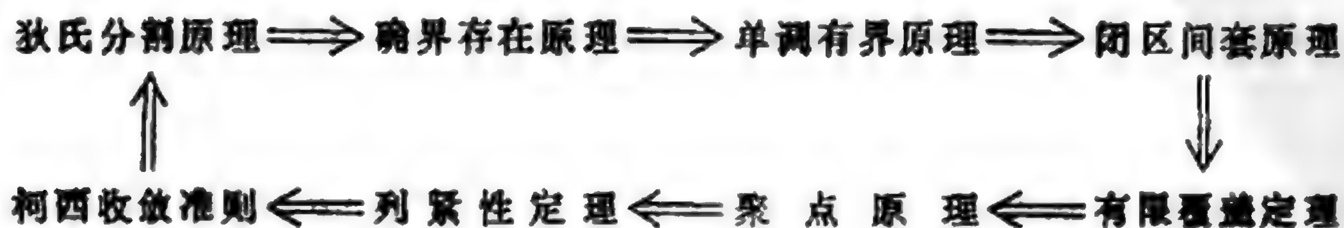
$$a_1,\ b_1,\ a_2,\ b_2,\ \cdots,\ a_n,\ b_n,\ \cdots$$

为$R$的一个基本数列，因此必收敛，设其极限为$c\in R$. 如果$c$在前段$X$（下部）中，可证$c$必为$X$的最大值. 其实，如若存在$x\in X$，使得$c<x$，取正数$\varepsilon\leqslant x-c$，则$(c-\varepsilon, c+\varepsilon)\subset X$，由条件$(iii)$知每一个$b_n\notin(c-\varepsilon,\ c+\varepsilon)$，这与上述基本数列$a_1$，$b_1$，$a_2$，$b_2$，…，$a_n$，$b_n$，…收敛于$c$相矛盾. 故$c$是$X$的最大值，此时，显然$Y$无最小值. 类似可证，如果$c$在后段（上部）$Y$中，则$C$是$Y$的最小值，而$X$无最大值. 故狄德金分割定理得证.

**评注** 这八个基本定理尽管各有其特征和用场，但从本质上讲，它们都是从不同的侧面反映了实数系$R$的连续性和完备性，几何的直观意义就是数轴上的点是连续的即无空隙的. 这些定理构成了极限论的理论基础.

最后我们还要指出，既然这八个定理是互相等价的，因此从原则上讲它们都有“资格”充当公理(参看下面框图)，即以任一个为出发点都可以推证其余定理. 实际上，除了本方案外，人们通常还喜欢用：单调有界序列、确界存在原理等作为公理，这当然都是可行的方案. 但其它定理却很少被采用作公理，例如有限覆盖定理等. 这是因为，人们一般要求公理是明显而直观的，这样就易于人们不加证明而直接接受.

前面所论证的八个基本定理互相等价性的逻辑框图如下：



## 习　　题

1．讨论下列问题：

（1）点集的聚点是否必为上、下确界？

（2）上、下确界是否必为聚点？

（3）有聚点的数列是否必有界？

2．试证：若数列$\{x_n\}$有界且有若干聚点，则此数列成振荡发散。

3．试证$x_0$是点集$D$的聚点的充分必要条件是：$x_0$的任一邻域内至少包含异于$x_0$而属于$D$的一个点。

4．试证单调数列收敛的充要条件是存在一个收敛子列。

5．设$A$是非空实数集且有下界。令$-A=\{-x|x\in A\}$，证明

$$\inf A=-\sup(-A).$$

6．给开区间$(0, 3)$构造一个没有有限覆盖的开覆盖的实例。

7．有界数列$\{x_n\}$若不收敛，则必存在两个收敛到不同极限的子列。

8．举例说明闭区间套定理的条件缺一时命题可能失真。

9．试用有限覆盖定理证明狄德金分割原理。

# § 5　函数极限与连续

## 一、函数极限

上面几节我们主要讨论了数列$\{x_n\}$当$n\to\infty$时的极限. 数列可以看成一种特殊的函数——以自然数集合为定义域的函数$x_n=f(n)$. 因此, 数列的极限可以看成是一种函数极限. 但数列毕竟是一种特殊的函数, 自变量是离散地变化的. 对于一般的函数, 例如定义在整个数轴上或某一区间上的函数$f(x)$, 自变量往往是连续地变化的, 这时, 我们常要考察与连续变量$x$对应的函数值$f(x)$的变化情况.

例1　$y=\frac{1}{x}$, $(x>0)$. 当$x$无限增大时, 它所对应的函数值无限地接近于常数零.

这个例子和数列$x_n=\frac{1}{n}$的变化趋势很相似. 所不同的, 仅在于$\frac{1}{x}$中的$x$可取区间$(0, +\infty)$上的所有值, 而$\frac{1}{n}$中的$n$只能取自然数. 然而, 当$n\to\infty$或$x\to+\infty$时, 它们所对应的函数值的变化趋势是一致的. 仿数列极限的$\varepsilon-N$定义, 可类似地给出当$x\to+\infty$时函数极限的定义.

**定义1**　设函数$f(x)$定义在区间$(a, +\infty)$上, $A$是一个常数, 若对任给的正数$\varepsilon$, 总存在某一个正数$M$, 使得当$x>M$时, 有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在$x$趋于$+\infty$时以$A$为极限．记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(x\to+\infty).$$

**说明** (i) $M$的作用与数列极限中的$N$一样，说明$x$充分大的程度，不同的是这里必须考虑比$M$大的所有实数$x$，而不仅仅只是自然数．

(ii) 几何意义：作直线$y=A-\varepsilon$，$y=A+\varepsilon$，则存在$M>0$，使当$x>M$时，函数$f(x)$的图象要全部落在以二条直线$y=A\pm\varepsilon$为边界，宽为$2\varepsilon$的带形区域之内(图5—1)．

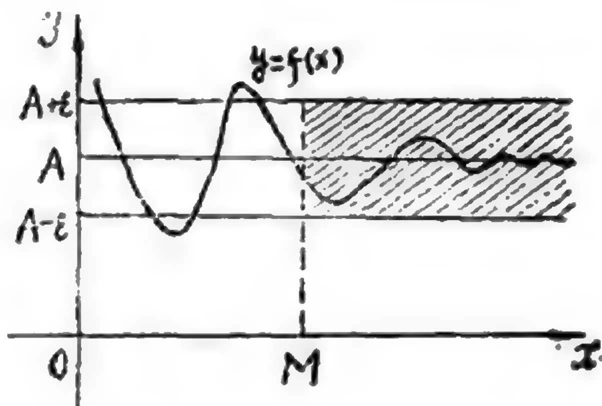



图5—1

类似地，我们定义当$x\to-\infty$时与$x\to\infty$时函数$f(x)$的极限．

**定义2** 设函数$f(x)$定义在区间$(-\infty, b)$上，$A$是一个常数，若对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一个正数$M$，使得当$x<-M$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在$x$趋于$-\infty$时以$A$为极限．记作

$$\lim_{n\to-\infty}f(x)=A\text{或}f(x)\to A(x\to-\infty).$$

**定义3** 设函数$f(x)$定义在区间$(-\infty, +\infty)$上，$A$是一个常数，若对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一个正数$M$，使得当$|x|>M$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在$x$趋于$\infty$时以$A$为极限．记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A \text{或} f(x) \to A(x\to\infty)。$$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 的几何意义：作直线 $y = A - \varepsilon$，$y = A + \varepsilon$，则存在$M>0$，当$x<-M$或$x>M$时，函数$f(x)$的图象要全部落在以二条直线$y = A\pm\varepsilon$为边界，宽为$2\varepsilon$的带形区域内（图5—2）。

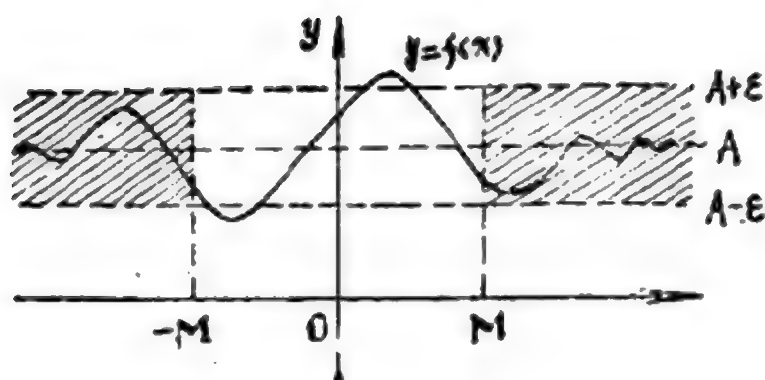



图5—2

由上述定义容易推出，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ 等价于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$。

例2 试用极限定义证明 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x} = 0$。

证明 因为$\left|\dfrac{\sin x}{x}\right| \leqslant \dfrac{1}{|x|}$，所以，对任给 $\varepsilon>0$，取 $M = \dfrac{1}{\varepsilon}$，于是当$|x|>M$时，有$|x|>\dfrac{1}{\varepsilon}$，即$\dfrac{1}{|x|}<\varepsilon$，更有

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| < \varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x} = 0。$$

例3 证明. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^2 - 5x + 13}{x^2 + 4} = 2$。

证明　对任给 $\varepsilon>0$，要使$\left|\frac{2x^2-5x+13}{x^2+4}-2\right|<\varepsilon$.

为此，考察$\left|\frac{2x^2-5x+13}{x^2+4}-2\right|=\left|\frac{5x-5}{x^2+4}\right|$.不妨设$|x|>2$.

此时，$\left|\frac{5x-5}{x^2+4}\right|\leqslant\frac{5|x|+5}{|x|^2-4}<\frac{5(|x|+1)}{(|x|-2)(|x|+1)}<\frac{5}{|x|-2}$.

因此，只要取，$M=\frac{5-2\varepsilon}{\varepsilon}$，当$|x|>M$时，有

$$\left|\frac{2x^2-5x+13}{x^2+4}-2\right|<\varepsilon.$$

故

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-5x+13}{x^2+4}=2.$$

上面我们研究了当$|x|$无限增大时，函数$f(x)$的变化情形. 但是，我们还常常需要研究当自变量$x$无限趋于某一确定的数$x_0$时，函数$f(x)$的变化趋势.

例 4　函数$f(x)=2x+1$，当 $x$不论以怎样的方式（从 2 的左侧、右侧或右左两侧）趋于 2 时，对应的函数值都无限地接近于 5 。这时，我们认为当$x\to 2$时，$f(x)=2x+1$的极限是 5（图 5—3）。

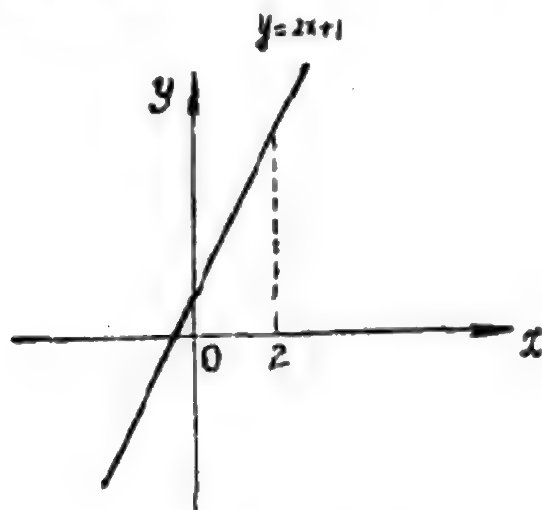


图 5—3

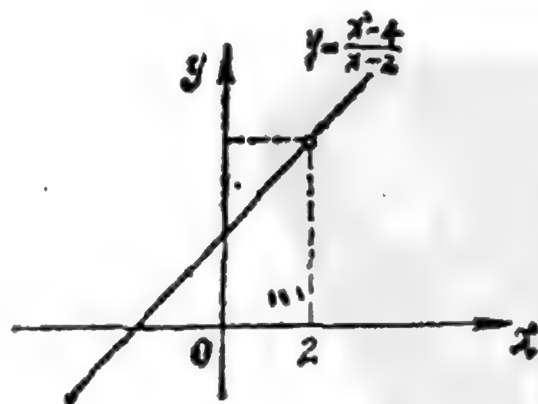


图 5—4

例 5　函数 $f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$，当 $x=2$ 时，$f(x)$ 无意义，但当 $x$ 不等于 2 而趋于 2 时，对应的函数值无限地接近于 4。这时，尽管 $f(2)$ 没有意义，但从函数值的变化趋势来看，我们仍然得承认当 $x\to 2$ 时，$f(x)=\frac{x^2-4}{x-2}$ 的极限是 4（图 5—4）。

例 6　函数 $f(x)=\begin{cases}|x| & x\neq 0,\\ 1 & x=0,\end{cases}$ 当 $x=0$ 时，$f(x)=1$，但当 $x$ 不等于 0 而趋于 0 时，对应的函数值无限地接近于 0。这时，尽管 $f(0)=1$ 而 $\neq 0$，但从函数值的变化趋势来看，我们还得承认当 $x\to 0$ 时，$f(x)=\begin{cases}|x| & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 的极限是 0（图 5—5）。

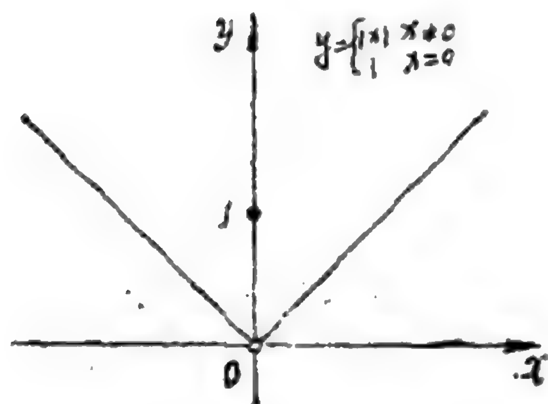



图 5—5

我们说，一个函数在自变量 $x$ 趋于一个定点 $x_0$ 时的极限是多少，是从它在无穷变化过程中的趋势来看的，与它在有限个点的函数值没有关系，特别地，与它在 $x_0$ 点的函数值当然也没有必然的联系。为了排除 $x=x_0$ 的情况，在函数极限的定义中，就特别规定 $x\to x_0$ 但 $x\neq x_0$。具体来说，就是

设函数 $f(x)$ 在点 $x_0$ 附近有定义（但在 $x_0$ 可以没有定义），如果当 $x$ 趋近于 $x_0$（但始终不等于 $x_0$）时，$f(x)$ 趋近于常数 $A$，就说函数 $f(x)$ 在 $x$ 趋向于 $x_0$ 时，以 $A$ 为极限。

我们把 $x$ 与 $x_0$、$f(x)$ 与 $A$ 的接近程度用不等式表示，就可给出精确定义：

**定义4** （函数极限的$\varepsilon-\delta$定义） 设函数$f(x)$的定义域为$I$，$x_0$是$I$的聚点，$A$为一个常数，如果对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一个正数$\delta$，使得当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称$f(x)$在$x$趋向于$x_0$时，以$A$为极限．记作

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A\text{或}f(x)\to A(x\to x_0).$$

说明 （i） 采用邻域的语言，函数极限的$\varepsilon-\delta$定义可叙述为：任意给定$A$的$\varepsilon$邻域$U(A,\varepsilon)$，总有$x_0$的一个$\delta$邻域$U(x_0,\delta)$，使得，当$x_0\neq x\in U(x_0,\delta)$时，$f(x)\in U(A,\varepsilon)$．

（ii） 定义中的$\delta$依赖于$\varepsilon$.一般说来，$\varepsilon$越小，相应的$\delta$也越小.当$\delta$找出后，任何$\delta'(0<\delta'<\delta)$都可充当$\delta$的"角色".

（iii） $x_0$是$f(x)$的定义域$I$的一个聚点.讨论$x\to x_0$时$f(x)$的极限，与$x_0$是否属于$I$无关，与函数$f(x)$在$x_0$的值$f(x_0)$无关．不等式$0<|x-x_0|<\delta$就是限制$x$既要属于$x_0$的$\delta$邻域，又不等于$x_0$，因此，不能将其写成$|x-x_0|<\delta$.

（iV） 几何意义 作直线$y=A+\varepsilon$，$y=A-\varepsilon$，总存在一个以$x_0$为中心以$\delta$为半径的小区间$(x_0-\delta,x_0+\delta)$，在这个小区间内（可能除掉点$x_0$）函数图象都落在以二直线$y=A\pm\varepsilon$为边界，宽为$2\varepsilon$的带形区域内（图5—6）.

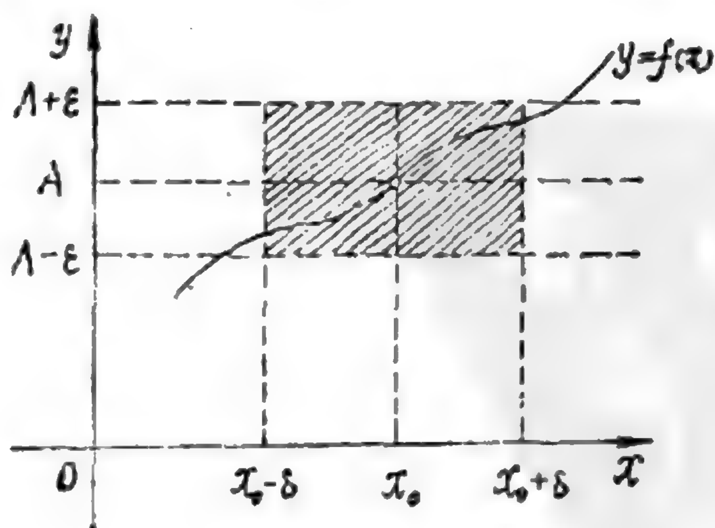



图5—6

**例 7** 证明 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

**证明** 作单位圆(图 5—7)，用 $|x|$ 表示 $\angle AOB$ 的弧度数。因为 $x\to 0$，不妨设 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$. 于是 $|AC|=\sin|x|=|\sin x|$, $|FB|=\mathrm{tg}|x|=|\mathrm{tg}x|$, 由图 5—7 可以看出，

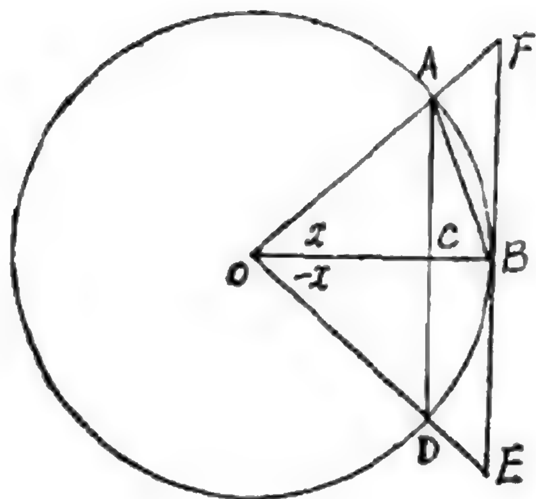


图 5—7

$$\triangle AOB\text{的面积}=\frac{1}{2}\left|\sin x\right|,$$

$$\text{扇形 }AOB\text{的面积}=\frac{1}{2}\left|x\right|,$$

$$\triangle FOB\text{的面积}=\frac{1}{2}\left|\mathrm{tg}x\right|,$$

因此

$$|\sin x|<|x|<|\mathrm{tg}x|,$$

亦即

$$1<\frac{|x|}{|\sin x|}<\frac{1}{|\cos x|},$$

或

$$|\cos x|<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1.$$

当 $0<|x|<\frac{\pi}{2}$ 时，$\frac{\sin x}{x}>0$，$\cos x>0$，从而有

$$\cos x<\frac{\sin x}{x}<1,$$

$$-(1-\cos x)=\cos x-1<\frac{\sin x}{x}-1<0\leqslant 1-\cos x,$$

所以

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<1-\cos x=2\sin^2\frac{x}{2}<2\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{x^2}{2}.$$

取　$\delta=\min\left\{\sqrt{2\varepsilon},\ \frac{\pi}{2}\right\}$，当 $0<|x|<\delta$时，有$\frac{x^2}{2}<\frac{(\sqrt{2\varepsilon})^2}{2}=\varepsilon$，所以

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\frac{x^2}{2}<\varepsilon,$$

因此

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

**评注**　已被证明的极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$，其不可忽视之处是$x$以弧度为单位，对于实数$x$，按规定$\sin x=\sin x$弧度。若在角度制中，在 $x\to 0$ 时，$\frac{\sin x}{x}$的极限就不是1，而有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}.$$

事实上（如图5—7），若取$\angle AOB=x^\circ$，其中$x$为实数，$\sin x=\sin x^\circ$。设 $0<|x|<90$，由于扇形$AOB$的面积大于$\triangle AOB$的面积而小于$\triangle FOB$的面积，从而得

$$\frac{1}{2}\left|\sin x^\circ\right|<\frac{1}{2}\frac{|x|\pi}{180}<\frac{1}{2}\left|\operatorname{tg}x^\circ\right|.$$

因为$\sin x=\sin x^\circ$，故有

$$\frac{1}{2}\left|\sin x\right|<\frac{1}{2}\frac{|x|\pi}{180}<\frac{1}{2}\left|\operatorname{tg}x\right|,$$

或

$$\frac{\pi}{180}\left|\cos x\right|<\left|\frac{\sin x}{x}\right|<\frac{\pi}{180},$$

当 $0<|x|<90$ 时，$\frac{\sin x}{x}>0$，$\cos x>0$，从而有

$$\frac{\pi}{180}\cos x<\frac{\sin x}{x}<\frac{\pi}{180}.$$

由比推得

$$0<\frac{\pi}{180}-\frac{\sin x}{x}<\frac{\pi}{180}(1-\cos x)<\frac{\pi}{180}\ \frac{x^2}{2}.$$

所以只要取 $\delta=\min\left\{\frac{6\sqrt{10\varepsilon}}{\sqrt{\pi}},\ 90\right\}$，当 $0<|x|<\delta$时，就有

$$\left|\frac{\pi}{180}-\frac{\sin x}{x}\right|<\varepsilon,$$

故 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}$得证.

公式 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 比 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{180}$简洁，便于记忆和运用．在高等数学中我们还可以列出很多用弧度制比用角度制简洁的三角函数导数公式和积分公式，这说明了在高等数学中使用弧度制的优越性．

例 8　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}.$

这里，$f(x)=\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}$虽在点 $x=1$ 没有定义，但它的极限存在与否与之并无关系．

证明　当 $x\neq 1$ 时，$\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(2x+1)}$
$=\frac{x+1}{2x+1}$，不妨限制$x$于 $0<|x-1|<1$，即$x\neq 1$，$0<$

$x<2$，则有

$$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{x+1}{2x+1}-\frac{2}{3}\right|=\left|\frac{1-x}{3(2x+1)}\right|$$

$$<\frac{|x-1|}{3}.$$

于是，对任给$\varepsilon>0$，只要取$\delta=\min\{3\varepsilon, 1\}$，当$0<|x-1|<\delta$时，便有$\left|\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}-\frac{2}{3}\right|<\varepsilon$，即

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{2x^2-x-1}=\frac{2}{3}.$$

例 9　证明$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$　$(a>0, a\neq 1)$.

证明　任给$0<\varepsilon<1$，要使$|a^x-1|<\varepsilon$成立，即

$$1-\varepsilon<a^x<1+\varepsilon.$$

先设$a>1$，在不等式两边取对数，有

$$\log_a(1-\varepsilon)<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

$\log_a(1-\varepsilon)<0$，我们把它写成$-\log_a\frac{1}{1-\varepsilon}$，这样便有$\log_a\frac{1}{1-\varepsilon}>0$，并且

$$-\log_a\frac{1}{1-\varepsilon}<x<\log_a(1+\varepsilon).$$

只要取$\delta=\min\left\{\log_a\frac{1}{1-\varepsilon}, \log_a(1+\varepsilon)\right\}$，则当$0<|x|<\delta$时，不等式

$$|a^x-1|<\varepsilon$$

成立，即

$$\lim_{x\to 0} a^x = 1, \quad (a>1).$$

对 $0<a<1$ 的情形，可类似地证明.

例10　证明 $\lim\limits_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

证明　因为 $\left|\sin x - \sin x_0\right| = \left|2\cos\frac{x+x_0}{2}\sin\frac{x-x_0}{2}\right|$

$\leqslant 2\left|\sin\frac{x-x_0}{2}\right| \leqslant \left|x-x_0\right|$.　任给 $\varepsilon>0$，　取 $\delta=\varepsilon$，

当 $0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|\sin x - \sin x_0|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0.$$

类似可证 $\lim\limits_{x\to x_0} \cos x = \cos x_0$.

以上所考虑的是当自变量$x$以任意方式趋近于$x_0$时，函数 $f(x)$ 的极限．但有些问题要求我们考虑函数在点$x_0$的某一侧变化的情况．例如，函数 $f(x)=[x]$，当$x$从点$x_0=1$的左侧趋向于1时，$f(x)$趋向于0；而当$x$从点$x_0=1$的右侧趋向于1时，$f(x)$趋向于1．于是引出函数$f(x)$在一点的单侧极限的概念．

**定义5**　设函数 $f(x)$ 在点$x_0$的右近旁（可能除去$x_0$本身）有定义，$A$是一个常数，若对任给的正数 $\varepsilon$，总存在某一个正数$\delta$，使得当$x_0<x<x_0+\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当$x$从右侧趋于$x_0$时，以$A$为右极限．记作

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = A \text{或} f(x) \to A(x \to x_0^+).$$

也可以记为　　$f(x_0+0)=A$.

类似地，可以给出左极限的定义：

**定义 5′**　设函数$f(x)$在点$x_0$的左近旁（可能除去$x_0$本身）有定义，$A$是一个常数，若对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一个正数$\delta$，使得当$x_0-\delta<x<x_0$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$当$x$从左侧趋于$x_0$时，以$A$为左极限．记作

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = A \text{或} f(x) \to A(x \to x_0^-).$$

也可以记为　　$f(x_0-0)=A$.

**例11**　符号函数 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x>0, \\ 0 & x=0, \\ -1 & x<0. \end{cases}$ 易知

$\lim_{x \to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1$，$\lim_{x \to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1$．值得注意的是$f(0)=0$.

根据函数在一点的极限及左、右极限的定义，立即可得

**定理 1**　函数$f(x)$在点$x_0$的极限为$A$的充要条件是：

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=A.$$

证明　必要性是显然的．下面证明充分性：由于$f(x_0+0)=A$，由定义 5，对任给 $\varepsilon>0$，必能找到$\delta_1>0$，使得当 $0<x-x_0<\delta_1$时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$；又由于$f(x_0-0)=A$，由定义5′，对上述的$\varepsilon$，必能找到 $\delta_2>0$，使得当$0<x_0-x<\delta_2$时，有 $|f(x)-A|<\varepsilon$．取 $\delta=\min\{\delta_1, \delta_2\}$，于是当$0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$.

前面所讨论的函数极限，都是当自变量 $x\to x_0$（或$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$，$x\to\infty$，$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时，其所对应的函数值趋近于某个定数的情形，但有些函数也可以是趋于无穷大. 例如

$f(x)=x^3$，当$x\to+\infty$时，它所对应的函数值越变越大，趋向正无穷大.

当$x\to-\infty$时，它所对应的函数值越变越小，趋向负无穷大.

当 $x\to\infty$时，它所对应的函数值的绝对值越变越大，趋向正无穷大.

又例如 $f(x)=\dfrac{1}{x}$. 当 $x\to 0^+$时，它所对应的函数值趋向正无穷大.

当$x\to 0^-$时，它所对应的函数值趋向负无穷大.

当$x\to 0$ 时，它所对应的函数值的绝对值趋向正无穷大.

仿数列无穷大的定义，我们有：

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty$的定义 若对任给的正数$G$，总存在某一正数$M$，使得当$|x|>M$时，有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数$f(x)$在无限远处趋于无穷大. 记作

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\infty\text{或}f(x)\to\infty(x\to\infty).$$

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$的定义 若对任给正数$G$，总存在某一正

数$\delta$，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)|>G,$$

则称函数$f(x)$在点$x_0$处趋于无穷大．记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=\infty \text{或} f(x)\to\infty(x\to x_0).$$

类似地可以给出$\lim\limits_{x\to x_0}(f)x=+\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=-\infty$

$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\infty$等的定义．

在讨论函数极限时，除了上述各种情况外，还有极限不存在的情形，譬如

$$f(x)=\sin\frac{1}{x},\qquad f(x)=\cos x.$$

前者，当 $x\to0$时，函数值无限次地在 $-1$与$1$之间振荡（图5—8），不能趋于某一确定的数，但也不是趋于无穷大．我们说，在$x\to0$时，它的极限不存在．后者，当$x$的绝对值无限增大时，函数值也是无限次地在 $-1$与$1$之间振荡，所以在$x\to\infty$时，它的极限不存在．

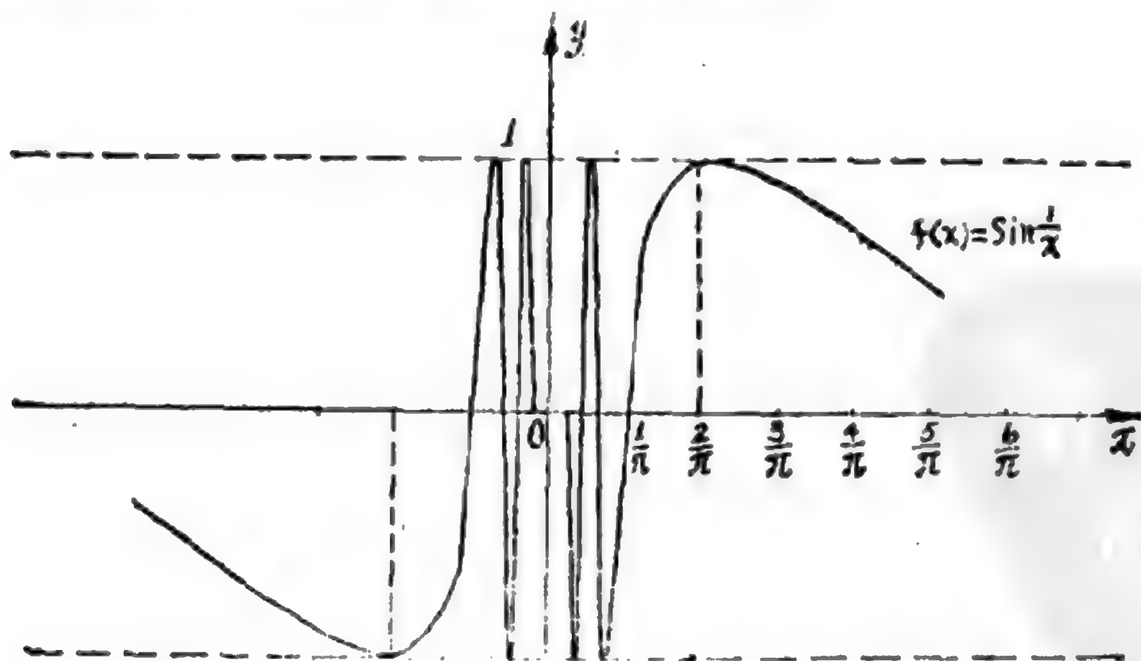



图 5—8

## 二　函数极限与数列极限的联系

一般函数的极限可以归结为数列的极限，下面的一个定理通常称为海因（Heine）定理，它把函数的极限和数列的极限沟通起来，因此也叫归并原则.

**定理 2**　$\mathop{\mathrm{sim}}\limits_{x\to x_0} f(x)$存在且等于$A$的充要条件是：对于任意数列$\{x_n\}$，只要$x_n \neq x_0$和$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$，相应的函数值数列

$$f(x_1),\ f(x_2),\ \cdots,\ f(x_n),\ \cdots$$

都有　$\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$。

**证明**　**必要性**　设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，$\{x_n\}$是任意一个收敛于$x_0$的数列，即$x_n \neq x_0 (x = 1, 2, \cdots)$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$.需要证明相应的数列$y_n = f(x_n) \to A (n\to\infty)$.

由条件，已知$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$，对任给的$\varepsilon > 0$，存在$\varepsilon > 0$，使当$0 < |x - x_0| < \delta$时，有

$$|f(x) - A| < \varepsilon,$$

由于$x_n \to x_0$，$x_n \neq x_0 (n = 1, 2, \cdots)$，所以对上述的$\delta$，必能找到$N > 0$，使$n > N$时，总有$0 < |x_n - x_0| < \delta$，于是当$n > N$时，也有$|f(x_n) - A| < \varepsilon$，即

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = A。$$

**充分性** 用反证法．设当$x \to x_0$时，$f(x)$不以$A$为极限，则存在某一个$\varepsilon_0 > 0$，对任意的$\delta > 0$，总还有满足$0 < |x' - x_0| < \delta$的点$x'$，使得$|f(x') - A| \geqslant \varepsilon_0$．现依次取$\delta = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots$，则存在相应的$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n, \cdots$，使得

$$0 < |x_1 - x_0| < 1, \quad 但 \quad |f(x_1) - A| \geqslant \varepsilon_0;$$

$$0 < \left|x_2 - x_0\right| < \frac{1}{2}, \quad 但 \quad \left|f(x_2) - A\right| \geqslant \varepsilon_0;$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

$$0 < \left|x_n - x_0\right| < \frac{1}{n}, \quad 但 \quad \left|f(x_n) - A\right| \geqslant \varepsilon_0;$$

$$\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots$$

从左边一列容易看出，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0 (x_n \neq x_0, n = 1, 2, \cdots)$，而右边一列是它所对应的函数值列$\{f(x_n)\}$却不以$A$为极限，这与假设矛盾，充分性得证．

**定理 3** $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$存在且等于$A$的充要条件是：对于任意数列$\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$，相应的函数值数列

$$f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_n), \cdots$$

都有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$．

证明留给读者考虑．

关于数列极限的许多性质，都可过渡到一般的函数极限，得出相应的性质，不过有的应作适当的修改．它们的证法也类似．这里特别值得一提的是应用海因定理来证明函数极限的性质很方便．下面将关于函数极限的几个命题列出

来，并对个别命题给以证明，以示海因定理把数列极限的性质过渡到函数极限上来的作用．

命题 1（唯一性） 若极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在，则它只有一个极限．

命题 2（局部有界性） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$存在且有限，则存在点$x_0$的某一$\delta$邻域$U(x_0,\delta)$，使得$f(x)$在$(x_0,\delta)$内有界$(x\neq x_0)$．

命题 3（局部保号性） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则对于任意满足条件$0<B<A$的$B$，存在点$x_0$的某一$\delta$邻域$U(x_0,\delta)$，使得对一切$x\in U(x_0,\delta)$ $(x\neq x_0)$恒有$f(x)>B>0$．若$A<0$时，则对于任意满足条件$A<B<0$的$B$，存在点$x_0$的某一$\delta$邻域$U(x_0,\delta)$，使得对一切$x\in U(x_0,\delta)(x\neq x_0)$恒有$f(x)<B<0$．

命题 4（单调性） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$与$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$皆存在，且存在点$x_0$的$\delta$邻域$U(x_0,\delta)(x\neq x_0)$有$f(x)\leqslant g(x)$，则$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\leqslant\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$．

命题 5（绝对收敛性） 若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$则$\lim\limits_{x\to x_0}|f(x)|=|A|$．

命题 6（迫敛性） 如果在点$x_0$的某邻域$U(x_0,\delta)$内$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x)(x\neq x_0)$，又若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$则

$$\lim_{x\to x_0} h(x)=A.$$

证明　设$\{x_n\}$是任意一个收敛于$x_0$的数列，$x_n \neq x_0$，由所设和海因定理的必要条件，我们有

$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty} g(x_n)=A$，　并且 $f(x_n)\leqslant h(x_n)\leqslant g(x_n)$

根据数列极限夹定理，有

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n)=A.$$

由于数列$\{x_n\}$的任意性，据海因定理的充分条件，便得

$$\lim_{n\to\infty} h(x_n)=A.$$

命题 7（四则运算）　若极限$\lim_{x\to x_0} f(x)$与$\lim_{x\to x_0} g(x)$都存在，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$在$x\to x_0$时极限也存在，且

(i)　$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0} g(x)$；

(ii)　$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0} g(x)$.

又若　$\lim_{x\to x_0} g(x)\neq 0$，则$\dfrac{f(x)}{g(x)}$在$x\to x_0$时极限存在，且有

(iii)　$\lim_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim_{x\to x_0} f(x)}{\lim_{x\to x_0} g(x)}$.

命题 8（柯西收敛准则）　函数$f(x)$在点$x_0$存在极限的充要条件是：对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一正数$\delta$，使对于任

意$x'$，$x''$，当$0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

证明　必要性　设$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$，则由极限的$\varepsilon-\delta$定义，对任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，使当$0<|x-x_0|<\delta$时，有$|f(x)-A|<\frac{\varepsilon}{2}$，于是若$x'$，$x''$使$0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$，便有$|f(x')-f(x'')|\leqslant|f(x')-A|+\left|f(x'')-A\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon$.

充分性　任取数列$\{x_n\}$（要求$x_n$属于$f(x)$的定义域，$x_n\neq x_0$，$(n=1,2,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$），由假设对任给的$\varepsilon>0$，存在相应的正数$\delta$，使$0<|x'-x_0|<\delta$，$0<|x''-x_0|<\delta$时，便有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$. 对上述的$\delta$. 由于$x_n\to x_0(n\to\infty)$，则存在相应的正数$N$，对一切$n$，$m>N$都有$0<|x_n-x_0|<\delta$，$0<|x_m-x_0|<\delta$，因此，$|f(x_n)-f(x_m)|<\varepsilon$，于是由数列的柯西收敛准则，$\{f(x_n)\}$极限存在，记为$A$，即

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=A.$$

根据海因定理$A$也是$f(x)$在$x\to x_0$时的极限.

下面利用函数极限的迫敛性证明一个重要的极限.

例12　证明$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.　　（1）

先证$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e$.不妨设$x>0$.当$n\leqslant x\leqslant n+1$时，有

$$1+\frac{1}{n+1}<1+\frac{1}{x}\leqslant 1+\frac{1}{n}$$

及
$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}. \quad (2)$$

作定义在[1，∞)上的阶梯函数：

$$f(x)=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n, \quad n\leqslant x<n+1;$$

$$g(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}, \quad n\leqslant x<n+1.$$

由(2)有 $f(x)<\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<g(x)$，$1\leqslant x<\infty$，由于

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1+\frac{1}{n+1}}{}^{*}$$

$$=e,$$

$$\lim_{x\to+\infty}g(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

$$=e,$$

根据命题6便得

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

剩下的是证明

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=e.$$

作代换 $x=-y$，则 $x\to-\infty$ 时，$y\to+\infty$，所以

---

* 极限 $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n=e$ 参见§6例12.

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\lim_{y\to+\infty}\left(1-\frac{1}{y}\right)^{-y}=\lim_{y\to+\infty}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y}$$

$$=\lim_{y\to+\infty}\left[\left(1+\frac{1}{y-1}\right)^{y-1}\left(1+\frac{1}{y-1}\right)\right]$$

$$=e\cdot 1$$

$$=e.$$

这样，（1）式完全得证。

在（1）式中，令$\frac{1}{x}=y$，因为当$x\to\infty$时，$y\to 0$，所以（1）式可以表示成另一种形式

$$\lim_{y\to 0}(1+y)^{\frac{1}{y}}=e. \qquad (3)$$

极限 $\lim_{y\to 0}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$以及（1）式、（3）式用处很广，为了更清楚地理解它们的变化趋势，下面绘出它们的图象，以资参考。

函数$f(n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)$（图5—9），当$n\to\infty$时，$f(n)\to e$。

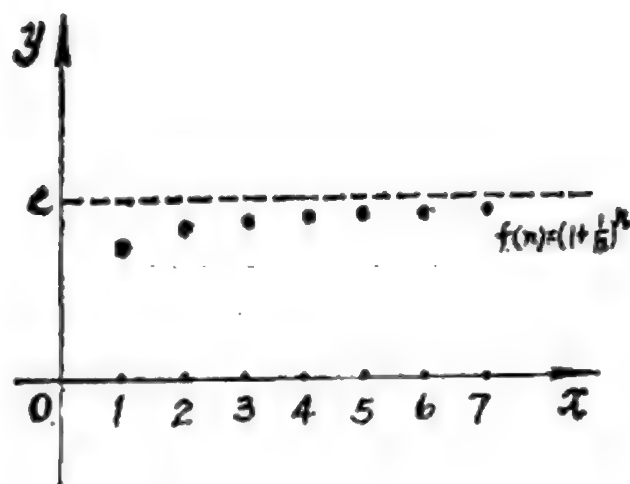



图5—9

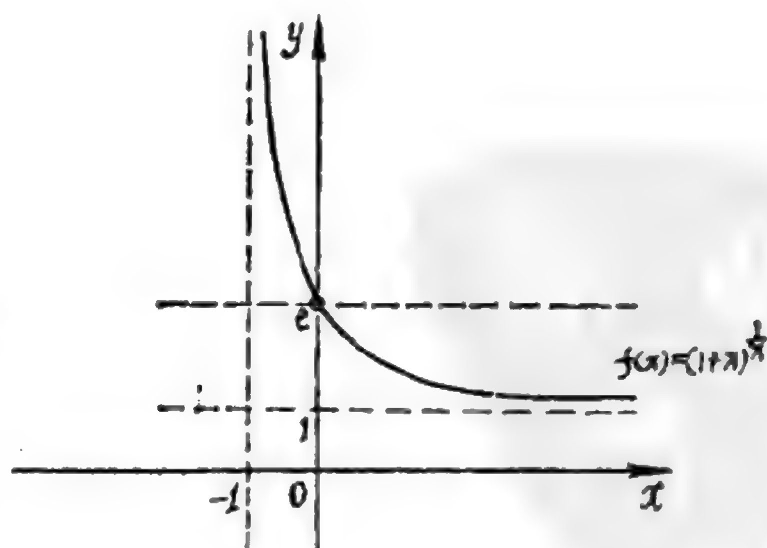



图5—10

函数 $f(x)=(1+x)^{\frac{1}{x}}$（图5—10），定义域 $D=\{x|-1<x<0\}\cup\{x|x>0\}$，当 $x\to0$ 时．$f(x)\to e$．

函数 $f(x)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$（图5—11），定义域 $D=\{x|x<-1\}\cup\{x|x>0\}$，当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to e$．

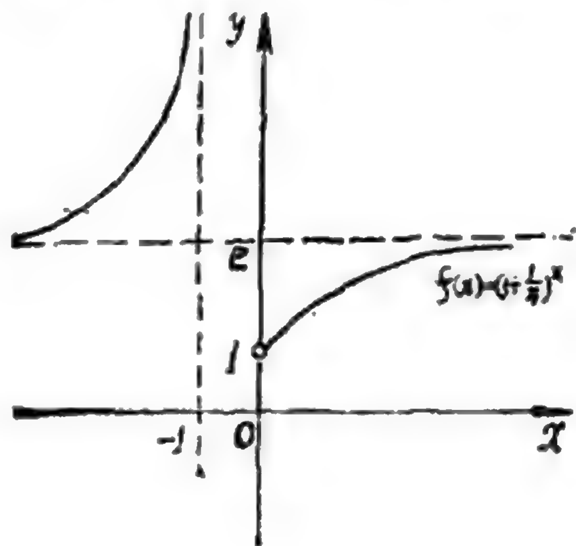



图5—11

海因定理是沟通函数极限和数列极限的渠道，它有广泛的应用．下面举一些例子：

### 1　判断函数极限不存在

利用海因定理来判断函数极限不存在极为方便，只要能选出一个数列 $x_n\to x_0(n\to\infty,\ x_n\neq x_0,\ n=1,2,\cdots)$，而 $\{f(x_n)\}$ 发散，或取出两个不同的数列 $x'_n\to x_0$ 和 $x''_n\to x_0$ $(n\to\infty,\ x'_n\neq x_0,\ x''_n\neq x_0,\ n=1,2,\cdots)$，如果对应的函数值数列 $\{f(x'_n)\}$ 和 $\{f(x''_n)\}$ 收敛于不同的二数，即可判断 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 不存在．

**例13**　证明函数 $f(x)=\sin\frac{1}{x}$，当 $x\to0$ 时，极限不存在．

证明　令 $x_n=\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，但是

$$\sin\frac{1}{x_n}=\sin\frac{1}{\dfrac{1}{n\pi+\frac{\pi}{2}}}=\sin\left(n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=(-1)^n,$$

当$n=\infty$时，$\sin\frac{1}{x_n}$的极限不存在，由海因定理，当$x\to 0$时函数$f(x)=\sin\frac{1}{x}$的极限也不存在.

例14 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}x}{x}$不存在.

证明 取数列$\{x_n'\}=\{\pi n\}$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}n\pi=\infty$；又取数列$\{x_n''\}=\left\{n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right\}$，则有$\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=\infty$. 因为$f(x_n')=\frac{\operatorname{tg}n\pi}{n\pi}=0$，所以

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=0.$$

又因为$f(x_n'')=\dfrac{\operatorname{tg}\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)}{n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}}=\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}}$,

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n'')=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\cos\frac{1}{n}}{\left(n\pi+\frac{\pi}{2}-\frac{1}{n}\right)\sin\frac{1}{n}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\cos\frac{1}{n}}{\frac{\pi\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}+\frac{\pi}{2}\sin\frac{1}{n}-\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{\pi+0-0}=\frac{1}{\pi}.$$

故 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\mathrm{tg}x}{x}$不存在。

**2 求数列极限**

根据海因定理，欲求数列的极限，可以转化为求函数的极限。

例15 求 $\lim\limits_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n}$。

解 令$\frac{1}{n}=x_n$，当$n\to\infty$时，$x_n\to 0$，因为

$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n}=\lim_{x_n\to 0}\frac{\sin 2x_n}{x_n},$$

且
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{x}=\lim_{x\to 0} 2\cdot\frac{\sin 2x}{2x}=2\cdot 1=2.$$

故
$$\lim_{n\to\infty} n\sin\frac{2}{n}=2.$$

**3 求函数极限**

海因定理告诉我们，如果已知函数$f(x)$在点$x_0$的极限存在，欲求此极限，只要适当选取一数列$x_n\to x_0(n\to\infty)$，$x_n\neq x_0$，求出数列$\{f(x_n)\}$的极限便是函数$f(x)$在点$x_0$的极限。

例16 求$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}$，（$a>0$，$a\neq 1$）。

解 因为$\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\log_a x}{x}$存在，又由数列极限知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=0$，所以

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x} = 0 .$$

**评注** 把求数列极限化为求函数极限，就给求数列极限开辟了广阔的天地。这是因为求函数极限可以有多种方法，针对不同函数的特点，可以利用函数的连续性、洛比塔（Hospitale）法则、函数的泰劳（Taylor）展开式等，但也应该明白，并不是任何数列极限问题都能化为函数极限问题的，例如，当数列的通项本身呈现$n$项之和或积的形式时就不能按海因定理转化为函数的极限了。

## 三　函数的连续性

### 1　连续与间断的概念

函数的种类极为复杂，其中有一类重要的函数，叫做连续函数。研究连续函数，无论从理论上或实际应用上讲，都是很有意义的。函数是“连续”的，从图形上看就是函数的图象是一条连绵不断的曲线，但为了对它作进一步的分析与研究，还必须给“连续”以确切的定义。

**定义 6**　设函数$f(x)$在$x_0$的某个邻域内有定义，且

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0),$$

则称函数$f(x)$在点$x_0$连续。

由定义可知，连续是 $f(x)$ 在 $x_0$ 的极限值等于函数值$f(x_0)$的特殊情形：只要$x$充分接近$x_0$，$f(x)$就可以任意接近$f(x_0)$。根据定义 6，我们有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(\lim_{x \to x_0} x) = f(x_0)$$

仿函数极限的$\varepsilon$-$\delta$定义，亦可用$\varepsilon$-$\delta$的语言改写定义 6 为

**定义 6′** 设函数$f(x)$在$x_0$的某个邻域内有定义，若对任给的正数$\varepsilon$，总存在某一个正数$\delta(x_0)$*,使得当$|x-x_0|<\delta(x_0)$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

我们还可以用增量的形式给出函数 $f(x)$在点$x_0$ 连续的定义.

设 $\Delta x=x-x_0$（$\Delta x$可能是正数也可能是负数)，称为自变量$x_0$的增量. 那么，$x=x_0+\Delta x$.

设$\Delta y=f(x)-f(x_0)$，称为函数$y$在$x_0$的增量，

故有 $\Delta y=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=y-y_0$.

**定义 6″** 设函数$f(x)$在$x_0$的某个邻域内有定义，如果

$$\lim_{\Delta x\to 0}\Delta y=0,$$

则称函数$f(x)$在点$x_0$连续.

定义 6″指出，如果函数$f(x)$在$x_0$连续，那么，只要自变量相对于$x_0$的变化充分小，函数值相对于$f(x_0)$的变化也可以任意小，这正是连续函数的特性.

客观物理过程没有只在一点连续的情形，因此，我们还要引进函数在一个区间上连续的概念. 若函数 $f(x)$ 在区间$(a,b)$或$[a,b]$上每一点都连续，则称函数$f(x)$在区间$(a,b)$或$[a,b]$上是连续的，对于区间端点上的连续性，要按左、右连续来确定.

---

* 一般说来，正数$\delta$与$x_0$有关，因而表示为$\delta(x_0)$. 下面我们将会看到，$\delta$是否与$x_0$有关，将造成连续函数性质上的重大差异.

**定义7** 若$f(x_0-0)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$左连续．若$f(x_0+0)=f(x_0)$，则称函数$f(x)$在点$x_0$右连续．

根据定义7与本节定理1，立即有

**定理4** 函数$f(x)$在点$x_0$连续的充要条件是：

$$f(x_0-0)=f(x_0)=f(x_0+0).$$

例17 证明$f(x)=a^x\ (a>0)$，在任何点上都连续．

证明 任取一点$x_0$，

$$|\Delta y|=|a^{x_0+\Delta x}-a^{x_0}|=a^{x_0}|a^{\Delta x}-1|,$$

由于$a^{x_0}$是确定的常数，所以只须证明当$\Delta x\to 0$时，$a^{\Delta 0}\to 1$就可以了．

在本节中已证得$\lim\limits_{x\to 0}a^x=1$．亦即，当$\Delta x\to 0$时，$a^{\Delta x}\to 1$，所以，当$\Delta x\to 0$时，$\Delta y\to 0$．

由定义6″知，$f(x)=a^x$，$(a>0)$，在点$x_0$连续，但由于$x_0$的任意性，可知$f(x)=a^x\ (a>0)$，在任何点上都连续，即在$(-\infty,+\infty)$上连续．

同样，根据我们已证明的，$\lim\limits_{x\to x_0}\sin x=\sin x_0$，$\lim\limits_{x\to x_0}\cos x=\cos x_0$，按定义6可知正弦函数、余弦函数在$(-\infty、+\infty)$上连续．

例18 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ 在点$x_0=0$的连续性．

解 因为$\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{x}=1=f(0)$，

$$\lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-}\frac{\sin x}{x}=1=f(0),$$

所以函数$f(x)$在点 $x_0=0$既是左连续又是右连续，故函数$f(x)$在点$x_0=0$连续.

由前面的叙述可以看出，函数$f(x)$在点$x_0$连续，必须且只须满足两个条件：第一，$f(x)$在$x_0$的极限存在；第二，$f(x)$在$x_0$有定义且$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$．这两个条件中的任何一个被破坏，都势必造成这样一种情况：不管自变量的变化有多小，函数值的变化不能任意小．这就是说，$f(x)$在点$x_0$不连续，我们称之为$f(x)$在$x_0$间断．$x_0$称为$f(x)$的间断点或不连续点．

函数在$x_0$的间断分为两种情况．如果仅是上述第二个条件不满足，那么只要我们补充$x_0$点的定义（在$f(x_0)$不存在时）或改变函数在$x_0$的值（在$f(x_0)$存在，但$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\neq f(x_0)$时），使得$f(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$，这时得到一个新的函数，它在点$x_0$连续，且与$f(x)$的不同仅在于一个点$x_0$的函数值，显然这样的间断函数$f(x)$与连续函数本质上没有多大区别．我们把这种间断点$x_0$称为可去间断点．

例19 函数$f(x)=\frac{\sin x}{x}$，$\lim\limits_{x\to 0} f(x)=1$ 但 $f(0)$没有定义，所以$f(x)$在$x_0=0$间断．但定义$f(0)=1$，函数

$$f(x)=\begin{cases}\frac{\sin x}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$$

就在$x_0=0$连续了。

例20　函数 $f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 3 & x=0, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

但$f(0)=3$，两者不等，所以$f(x)$在$x_0=0$间断。但改变$f(x)$在$x_0=0$的定义，使$f(0)=0$，则函数

$$f(x)=\begin{cases} x\sin\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

就在$x_0=0$连续了。

如果上述第一个条件被破坏，这样的间断函数与连续函数有本质的区别。在$x_0$点两边，其函数值的变化或有一个跳跃，或不停地振荡，总之，不可能采用例19、例20的办法使其连续，这种间断点称为不可去的。

例21　符号函数 $\operatorname{sgn}x=\begin{cases} 1 & x>0 \\ 0 & x=0 \\ -1 & x<0, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$，

$\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$，两者不等，所以$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$不存在，$f(x)$在$x_0=0$间断且$x_0=0$不可去。

例22　函数 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x^2} & x\neq 0 \\ 0 & x=0, \end{cases}$ $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=\infty$，

但不能定义$f(0)=\infty$，$f(x)$在$x_0=0$间断且$x_0=0$不可去。

例23　函数 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$，在$x_0=0$的左、右极限都不存在，其函数值永远振荡于$-1$与$1$之间，$f(x)$在$x_0=0$

间断且$x_0=0$不可去。

## 2 连续函数的性质和初等函数的连续性

函数的连续性与极限密切相关，因此有关函数极限的许多性质，都可以移到连续函数中来。首先，极限四则运算定理反映在连续函数上就是下述定理

定理5（连续函数四则运算） 若、$f(x)$、$g(x)$在点$x_0$都连续，则$f(x)\pm g(x)$，$f(x)\cdot g(x)$，$\frac{f(x)}{g(x)}$（这里$g(x_0)\neq 0$）在点$x_0$也连续。

为了下面的讨论，我们还需要

**定理6** （复合函数连续性） 若函数$y=f(u)$在点$u_0$连续，$u=\varphi(x)$在点$x_0$连续，且$u_0=\varphi(x_0)$，则复合函数$f[\varphi(x)]$在点$x_0$连续。

证明 由于$f(u)$在点$u_0$连续，所以对任给$\varepsilon>0$，总存在某一个$\delta(u_0)>0$，当$|u-u_0|<\delta(u_0)$时，有

$$|f(u)-f(u_0)|<\varepsilon.$$

再由$u_0=\varphi(x_0)$及$u=\varphi(x)$在点$x_0$的连续性，对上述$\delta(u_0)>0$，总存在某一个$\eta(x_0)>0$，当$|x-x_0|<\eta(x_0)$时，便有

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)|=|u-u_0|<\delta(u_0).$$

可见，对任给的正数$\varepsilon$，存在$\eta(x_0)>0$，只要$|x-x_0|<\eta(x_0)$，便有

$$|f[\varphi(x)]-f[\varphi(x_0)]|<\varepsilon,$$

即$f[\varphi(x)]$在点$x_0$连续。

根据连续性定义，它的结论可简洁地写成：

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)]=f[\varphi(\lim_{x\to x_0}x)]$$

$$=f[\varphi(x_0)].$$

例24 求 $\lim\limits_{x\to 1}\cos(e^x-e)$.

解 由于$\cos(e^x-e)$可看作$\cos u$与$u=e^x-e$的复合函数，函数$u=e^x-e$在点$x=1$连续，其函数值为0．函数$\cos u$在$u=0$也连续，故有

$$\lim_{x\to 1}\cos(e^x-e)=\cos[\lim_{x\to 1}(e^x-e)]=\cos 0=1.$$

**定理7** （反函数连续性） 若函数$f(x)$在$[a、b]$上严格递增（减）且连续，则其反函数$f^{-1}(x)$在相应的定义域$[f(a)、f(b)]$（$[f(b)、f(a)]$）上连续．

证明从略

利用极限定义及上面的几个结论，就可以证明基本初等函数（三角函数、反三角函数、指数函数、对数函数、幂函数）在它们的定义域内都是连续的．

1） 三角函数的连续性

我们已证$f(x)=\sin x$在$(-\infty、+\infty)$内连续，而$y=\cos x$可以看作是两个连续函数$y=\sin u$和$u=x+\frac{\pi}{2}$的复合函数，所以是连续的．至于$\operatorname{tg}x$、$\operatorname{ctg}x$可以写成两连续函数的商

$$\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x},\quad \operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}.$$

由定理5，它们在其定义域内是连续的．

2） 反三角函数的连续性

因为$y=\sin x$在$\left[-\frac{\pi}{2}、\frac{\pi}{2}\right]$上是严格递增且连续的，由定理7可知，它的反函数$y=\arcsin x$在$[-1、1]$上连续，

同理可以说明其它反三角函数在其定义域内也连续．

3） 指数函数 $y=a^x(a>0)$在$(-\infty,\ \infty)$上连续，已被证明过．

4） 对数函数$y=\log_a x$的连续性

当$a>1$时，$y=\log_a x$是严格递增的连续函数 $y=a^x(a>1)$的反函数，所以$y=\log_a x(a>1)$在$(0,\infty)$上连续．

当$0<a<1$时，令 $a=\frac{1}{b}$，这时$b>1$，于是，$\log_a x=-\log_b x$，从而易知 $y=\log_a x$ $(0<a<1)$在$(0,\ \infty)$上连续．

5） 幂函数$y=x^\alpha$的连续性．

因为$y=x^\alpha=e^{\alpha\ln x}$是两个连续函数$y=a^u$，$u=\alpha\ln x$的复合函数．由复合函数连续性定理知道 $y=x^\alpha$在$(0,\infty)$上连续．

综上所述，我们得知：

一切基本初等函数在其定义域内是连续的．

我们把基本初等函数及一些常数经过有限次四则运算、复合运算与取反函数所得到的函数统称为初等函数．从而又得到：

**定理 8** 任何初等函数在它的定义域内均连续．

初等函数是最常见的一类函数，因而定理 8 的重要性是很明显的．

## 3 闭区间上连续函数的性质

闭区间上的连续函数有一些重要性质，这些性质在数学分析中经常用到，其证明方法也具有典型意义，因此要深入地理解它们．

**定理9（整体有界性）** 若函数$f(x)$在闭区间〔$a$、$b$〕上连续，则$f(x)$在〔$a$、$b$〕上有界.

证明 用反证法，假设函数$f(x)$在闭区间〔$a$、$b$〕上无界，那么对每一自然数$n$，在〔$a$、$b$〕上必可找到一点$x_n$，使得$|f(x_n)|>n$，取$n=1, 2, 3, \cdots$，得到一有界点列$\{x_n\}$，并且$|f(x_n)|>n$，即$f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$.

由于$\{x_n\}$有界，根据§4定理5，有收敛子列$x_{n_k}\to x_0$（$k\to\infty$），此处$x_0$是属于〔$a$、$b$〕的.

又由于$f(x_n)\to\infty(n\to\infty)$，从而有$f(x_{n_k})\to\infty(k\to\infty)$.

但由已知条件，函数$f(x)$在〔$a$，$b$〕上连续，故有$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$。如今$x_{n_k}\to x_0$（$k\to\infty$），那么由海因定理就有

$$\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0).$$

这样我们获得的两个结果$f(x_{n_k})\to\infty(k\to\infty)$及$f(x_{n_k})\to f(x_0)(k\to\infty)$是互相矛盾的．也就是说，$f(x)$在〔$a$、$b$〕上必须有界.

定理中的区间要求闭区间这件事是重要的，如果不是闭区间，有界性可能不成立．例如函数

$$f(x)=\frac{1}{x}$$

在半开区间（0，1）是连续的，但当$x$充分接近0时，函数值$\frac{1}{x}$可以任意大，这说明不是闭区间上的连续函数，虽然在各点局部有界，但在整体上不一定有界.

**定理10（最大、最小值定理）** 若函数$f(x)$在闭区间

〔$a$，$b$〕上连续，则$f(x)$在〔$a$、$b$〕上有最大值与最小值.

这定理是说，只要函数$f(x)$在闭区间〔$a$、$b$〕上连续，在〔$a$、$b$〕上至少存在两个点$x_1$，$x_2$使得

$$f(x_1)=\max_{a\leqslant x\leqslant b} f(x),\quad f(x_2)=\min_{a\leqslant x\leqslant b} f(x).$$

由上面的定理9可知，函数$f(x)$在闭区间〔$a$、$b$〕上有界，即满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切$x$所组成的函数值集合$\{f(x)\}$是有界的. 由确界存在定理，集合$\{f(x)\}$有上、下确界，分别以$M$、$m$表之. 定理中所说的最大值与最小值，也就是要我们在闭区间〔$a$、$b$〕上找两点$x_1$，$x_2$，使得

$$M=f(x_1)=\sup_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\},\quad m=f(x_2)=\inf_{a\leqslant x\leqslant b}\{f(x)\}.$$

证明　由定理9知，$f(x)$在〔$a$、$b$〕上有界，从而有上确界$M$及下确界$m$.现在证明$f(x)$有最大值，亦即在〔$a$、$b$〕上存在一点$x_0$，使$f(x_0)=M$. 按上确界定义，对$\varepsilon=\frac{1}{n}$（$n=1, 2, 3\cdots$）就存在有$x_n\in$〔$a$、$b$〕$(n=1,2,3,\cdots)$. 使得

$$M-\frac{1}{n}<f(x_n)\leqslant M,$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=M.$$

由于$\{x_n\}$有界，由§4定理5，知有收敛子列$\{x_{n_k}\}$，$x_{n_k}\to x_0\in$〔$a$，$b$〕$(k\to\infty)$. 于是根据子列的性质，有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_{n_k})=M.$$

因为$f(x)$在点$x_0$连续，即$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么由海因定

理便有

$$M=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0),$$

故存在$x_0\in[a,\ b]$，$f(x_0)$为函数$f(x)$的最大值。

同理可证，有$x_2\in[a,\ b]$，使$f(x_2)=m$。

定理中所指的区间是闭区间，函数是连续函数，是极为重要的，否则命题不成立。

例如函数$f(x)=x$在开区间（0，1）上连续，虽然有上确界1，下确界0，但$f(x)$在（0，1）内达不到上、下确界，$f(x)$在（0，1）内没有最大值与最小值。

又如函数 $f(x)=\begin{cases}-x+1 & 0\leqslant x<1\\ 1 & x=1\\ -x+3 & 1<x\leqslant 2,\end{cases}$

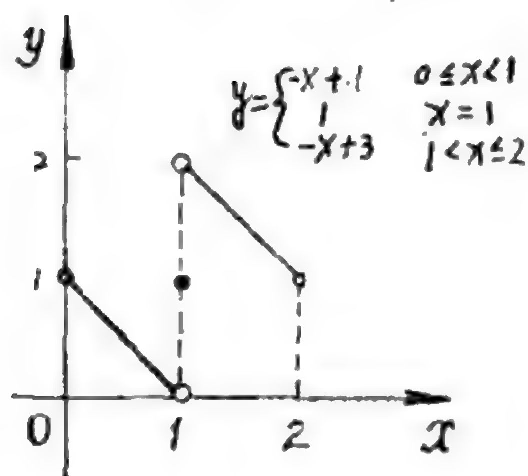



图 5—12

在闭区间〔0，2〕上有间断点$x=1$，它在〔0，2〕上既没有最大值，也没有最小值(图 5—12)。

**定理11（介值定理）** 设函数$f(x)$在闭区间〔$a$，$b$〕上连续，且$f(a)\neq f(b)$，若$c$是介于$f(a)$与$f(b)$之间的任何实数（$f(a)<c<f(b)$或$f(a)>c>f(b)$），则在（$a$、$b$）内至少可找到一点$x_0$，使得

$$f(x_0)=c.$$

为了证明此定理，先来证明它的一个特殊情形，叫做根的存在定理：

若函数$f(x)$在闭区间〔$a$，$b$〕上连续，且$f(a)$与$f(b)$异

号（即$f(a)f(b)<0$），则在（$a$，$b$）内至少可找到一点$x_0$，使得

$$f(x_0)=0.$$

几何意义是：有一段连续曲线 $AB$，在闭区间两个端点的图象分居于$x$轴的两侧，则这连续曲线至少与 $x$ 轴相交一次（图 5—13）。

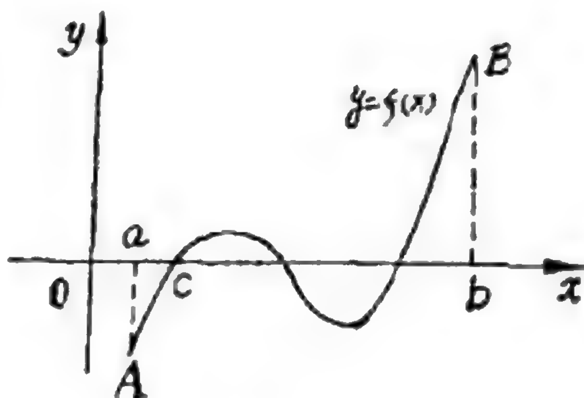


图 5—13

证明　用区间套定理．为确定起见，不妨设$f(a)<0<f(b)$．把$[a,b]$二等分，分点$x_1=\dfrac{a+b}{2}$，若 $f(x_1)=0$，则定理成立；若 $f(x_1)\neq 0$，有两种情形，当$f(x_1)>0$时，取左半区间为$[a_1、b_1]$；当$f(x_1)<0$时，取右半区间为$[a_1, b_1]$．总之，对闭区间$[a_1, b_1]$有$f(a_1)<0<f(b_1)$．再将$[a_1,b_1]$二等分，分点$x_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$，若$f(x_2)=0$，则定理得证，否则可取$[a_1, b_1]$的一半得$[a_2, b_2]$，并且$f(a_2)<0<f(b_2)$．这样继续下去，只会碰到两种可能的情况：

1）进行有限次后，在某分点处函数值为零，则定理得证．

2）每一次的分点函数值不为零，若如此，可把程序无限延续下去，得一列闭区间

$$[a,b],\ [a_1,b_1],\ [a_2,b_2],\ \cdots\cdots,\ [a_n,b_n],\ \cdots$$

它有两个性质：

(i)　$[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$并

且$f(a_n) < 0 < f(b_n)$ ($n = 1, 2, \cdots$)；

(ii) 当 $n \to \infty$时，$b_n - a_n = \frac{a-a}{2^n} \to 0$.

于是由区间套定理，存在唯一的点$x_0$属于上述每个闭区间，由于$f(a_n)$与$f(b_n)$总是异号，且$a_n \to x_0$，$b_n \to x_0$ ($n \to \infty$)，而$f(x)$在$x_0$又连续。在$f(a_n) < 0 < f(b_n)$中，令$n \to \infty$，取极限，得$f(x_0) \leqslant 0 \leqslant f(x_0)$，故$f(x_0) = 0$得证。

下面对介值定理给以证明：

作一个辅助函数

$$\varphi(x) = f(x) - c,$$

由于$f(x)$在$[a, b]$上连续，可推知$\varphi(x)$在$[a,b]$上连续，且$\varphi(a) = f(a) - c$，$\varphi(b) = f(b) - c$，因$c$在$f(a)$与$f(b)$之间，所以$\varphi(a)$与$\varphi(b)$异号，由根的存在定理，在$a$与$b$之间至少可找到一点$x_0$，使$\varphi(x_0) = 0$，或$f(x_0) - c = 0$，即$f(x_0) = c$。于是介值定理得证。

下面讨论一致连续性。

先看例子。$f(x) = x^2$在$(1, 2)$上连续，这意味着任给$\varepsilon > 0$，对任意的$x_0 \in (1, 2)$，总有$\delta(x_0) > 0$，只要$|x - x_0| < \delta(x_0)$，便有$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$。但是因为

$$|x^2 - x_0^2| = |x + x_0||x - x_0| \leqslant (|x| + |x_0|)|x - x_0| \leqslant 4|x - x_0|,$$

所以，只须取$\delta(x_0) = \frac{\varepsilon}{4}$，就有$|x^2 - x_0^2| < \varepsilon$。我们看到，这里的$\delta(x_0) = \frac{\varepsilon}{4}$与$x_0$并没有关系，对任给的$\varepsilon > 0$，$\frac{\varepsilon}{4}$是对任何$x_0 \in (1, 2)$都适合的$\delta$，换言之，只要取$\delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$，

就对（1，2）中的任何 $x_0$ 一致成立：$|x-x_0|<\delta$ 时，$|x^2-x_0^2|<\varepsilon$。在这种情况下，我们就说函数的连续性是一致的或均匀的。

但是 $\delta$ 与 $x_0$ 无关这件事并不是对任何连续函数都成立。我们看定义在〔1，$+\infty$）上的连续函数 $f(x)=x^2$，现在任给 $\varepsilon>0$，是否存在一个正数 $\delta$，能够对〔1，$+\infty$）上的任何 $x_0$，都满足只要 $|x-x_0|<\delta$，便有 $|x^2-x_0^2|<\varepsilon$ 呢？我们说这样的 $\delta$ 不存在，因为要

$$|x^2-x_0^2|=|x+x_0||x-x_0|$$
$$=(x+x_0)|x-x_0|<\varepsilon,$$

必须 $|x-x_0|<\dfrac{\varepsilon}{x+x_0}<\dfrac{\varepsilon}{x_0}$，这又必须 $\delta\leqslant\dfrac{\varepsilon}{x_0}$，即 $x_0\leqslant\dfrac{\varepsilon}{\delta}$，因而对大于 $\dfrac{\varepsilon}{\delta}$ 的 $x_0$，这个 $\delta$ 就不能用了。事实上，由图5—14可以看出，对同一个 $\varepsilon>0$，随着 $x_0$ 越来越大，$\delta$ 必须越来越小，$\delta$ 是与 $x_0$ 有关的。在这种情况下，我们说函数的连续性是不一致或不均匀的。

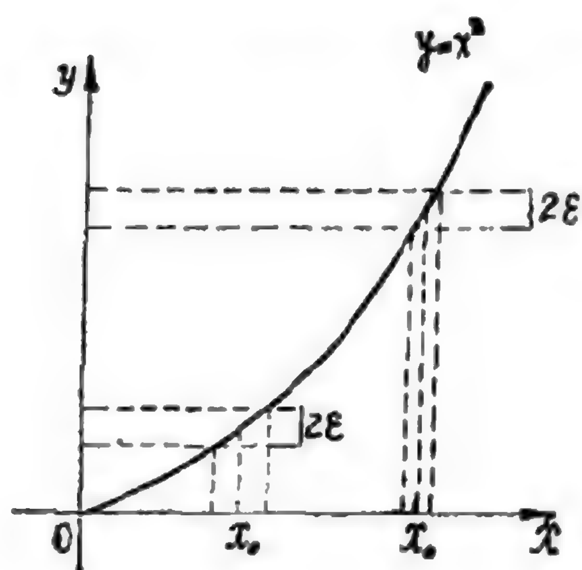



图5—14

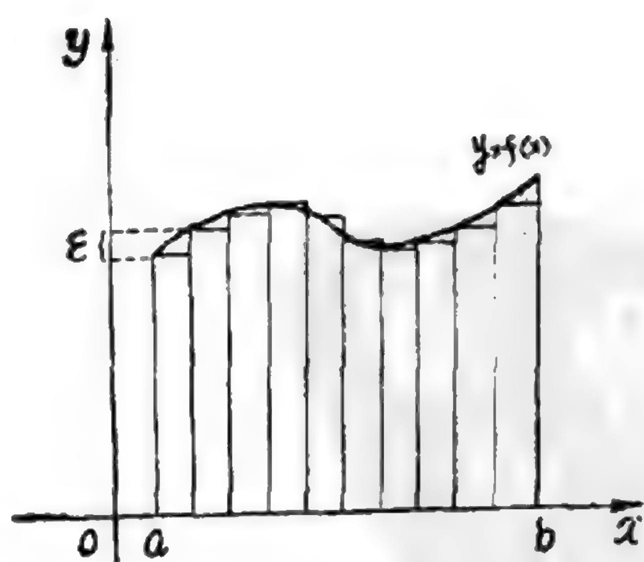



图5—15

一致连续是一种更强的连续性．一致连续的函数有着比一般的连续函数更好的性质，例如

（$i$） 定义在有限区间上的一致连续函数可以分成阶段来估计其函数值，而在每一个阶段上函数的变化可以小于事先给定的$\varepsilon>0$． 也就是说，一个有限区间上的一致连续函数，根据任意给定的误差限$\varepsilon>0$，必可找到一个$N$，将此区间分成$N$等分，设其分点为$x_1, x_2, \cdots, x_N$，然后依$f(x_1)$，$f(x_2)$，…，$f(x_N)$作一个阶梯函数，用这个阶梯函数来逼近原来函数$f(x)$，其误差不超过$\varepsilon$，但连续而非一致连续的函数就作不到这种“以直代曲”（图5—15）．

（$ii$） 我们知道在开区间$(a, b)$内连续的函数在$a$点的右极限与$b$点的左极限不一定存在，但可以证明在$(a, b)$内一致连续的函数在$a$点的右极限与$b$点的左极限都存在．

（$iii$） 在开区间$(a, b)$内连续的函数不一定有界，但在$(a, b)$内一致连续的函数却有界．

事实上，取$\varepsilon_0=1$，必有$N$，对于$x'$，$x''\in(a, b)$，

且当 $|x'-x''|\leqslant\frac{b-a}{N}$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0=1,$$

对于$(a, b)$的$N$等分点$x_1$，$x_2$，…，$x_N$，取

$$M=\max\{f(x_1), f(x_2), \cdots, f(x_N)\},$$

$$m=\min\{f(x_1), f(x_2), \cdots f(x_N)\},$$

显然，对任意$x\in(a, b)$，必有

$$m-1\leqslant f(x)\leqslant M+1$$

从而$f(x)$在$(a, b)$内有界得证．

由此可见，讨论函数的一致连续性是有意义的．首先我

们给出

**定义8**　设函数$f(x)$定义于区间 I 上，如果对任给的正数$\varepsilon$，都可找到一个仅与$\varepsilon$有关的$\delta>0$，使得 I 上的任意两点$x_1$，$x_2$，只要$|x_1-x_2|<\delta$，便有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在 I 上是一致连续的。

**定理12**　（康托定理）　闭区间$[a, b]$上的连续函数$f(x)$必在$[a, b]$上一致连续。

证明　设$x_0$是闭区间$[a, b]$上的任一点，因为函数$f(x)$在点$x_0$连续，所以对任给的$\varepsilon>0$，必有$\delta(x_0)$存在，使当$|x-x_0|<\dfrac{\delta(x_0)}{2}$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2},$$

因此，只要$x_1$，$x_2$是区间$\left(x_0-\dfrac{\delta(x_0)}{2},\ x_0+\dfrac{\delta(x_0)}{2}\right)$内并属于$[a, b]$的任意两点，则

$$|f(x_2)-f(x_1)|=|f(x_2)-f(x_0)+f(x_0)-f(x_1)|$$

$$\leqslant|f(x_2)-f(x_0)|+|f(x_1)-f(x_0)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

下面我们对区间$[a,b]$上每一点$x$都进行这样的作法，即每一个$x$都相应地有一个开区间$\left(x-\dfrac{\delta(x)}{2},x+\dfrac{\delta(x)}{2}\right)$，使得该区间内的任意两点$x_1$，$x_2$，都有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

如果将这些区间缩小一半，即对区间$\left(x-\dfrac{\delta(x)}{4},x+\dfrac{\delta(x)}{4}\right)$

中的任意两点$x_1$，$x_2$，更有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

显然，这些开区间集$\left\{\left(x-\frac{\delta(x)}{4},\ x+\frac{\delta(x)}{4}\right)\right\}$一定盖住了整个区间〔$a$，$b$〕。根据有限覆盖定理，从这些区间中必可选出有限个也能盖住〔$a$，$b$〕，不妨设这有限个区间为

$$\Delta_1=\left(x_1-\frac{\delta(x_1)}{4},\ x_1+\frac{\delta(x_1)}{4}\right),$$

$$\Delta_2=\left(x_2-\frac{\delta(x_2)}{4},\ x_2+\frac{\delta(x_2)}{4}\right),$$

……………………………

$$\Delta_n=\left(x_n-\frac{\delta(x_n)}{4},\ x_n+\frac{\delta(x_n)}{4}\right).$$

令 $\delta=\min\left\{\frac{\delta(x_1)}{4},\ \frac{\delta(x_2)}{4},\ \cdots,\ \frac{\delta(x_n)}{4}\right)$，则$\delta>0$。

下面我们来证明，对〔$a$，$b$〕上任意两点x，$x_2$，只要$|x_2-x_1|<\delta$时，就有

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

因为当$x_1$取定后，它至少属于区间$\Delta_1$，$\Delta_2$，…，$\Delta_n$中的一个，不妨设$x_1\in\left(x_m-\frac{\delta(x_m)}{4},\ x_m+\frac{\delta(x_m)}{4}\right)$ $(1\leqslant m\leqslant n)$，从而有

$$|x_1-x_m|<\frac{\delta(x_m)}{4}.$$

又因

$$|x_2-x_m|=|x_2-x_1+x_1-x_m|\leqslant|x_2-x_1|+|x_1-x_m|<\delta+\frac{\delta(x_m)}{4}\leqslant\frac{\delta(x_m)}{2},$$

这表明只要$x_1$属于$\Delta_m$，且$|x_2-x_1|<\delta$，则$x_2$必属于区间$\left(x_m-\frac{\delta(x_m)}{2}, x_m+\frac{\delta(x_m)}{2}\right)$。由于$x_1$与$x_2$都属于区间

$\left(x_m-\frac{\delta(x_m)}{2}, x_m+\frac{\delta(x_m)}{2}\right)$，于是

$$|f(x_2)-f(x_1)|<\varepsilon.$$

这说明对$[a, b]$上的任意两点$x_1$，$x_2$，只要满足$|x_2-x_1|<\delta$，就有

$$|(fx_2)-f(x_1)|<\varepsilon$$

成立．故在闭区间上连续的函数必一致连续．

对于定义域不是闭区间的连续函数，它是否在其定义域上一致连续呢？这需要对具体的问题进行具体的分析．

例25　证明$f(x)=\sqrt{x}$在区间$(1, +\infty)$内一致连续．

证明　欲使

$$|f(x_1)-f(x_2)|=|\sqrt{x_1}-\sqrt{x_2}|=\frac{|x_1-x_2|}{\sqrt{x_1}+\sqrt{x_2}}$$

$<|x_1-x_2|<\varepsilon$，显然，只要对任给的$\varepsilon$，取$\delta=\varepsilon$，当$|x_1-x_2|<\delta$时，有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon.$$

故$f(x)=\sqrt{x}$在区间$(1, +\infty)$内一致连续．

例26　证明$f(x)=\sin\frac{1}{x}$在$(0, 1)$内不一致连续．

证明　取

$$x'_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{\pi}{2}}, \quad x''_n\ \frac{1}{2n\pi-\frac{\pi}{2}},$$

则$|f(x'_n)-f(x''_n)|=|1-(-1)|=2$．但因为当$n\to\infty$时，

$$|x_n' - x_n''| = \frac{\pi}{4n^2\pi^2 - \frac{\pi^2}{4}} \longrightarrow 0,$$

所以对于任给的 $0 < \varepsilon < 2$，不论取多么小的 $\delta > 0$，只要$n$充分大，就有虽然 $|x_n' - x_n''| < \delta$，但是

$$|f(x_n') - f(x_n'')| = 2 > \varepsilon.$$

所以 $f(x) = \sin\frac{1}{x}$ 在（0，1）内不一致连续.

# §6 证明极限与求极限的若干方法

## 一 怎样用极限定义证明极限

例1 证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$　　　$(a>0)$。

证法1 (i) 当$a\geqslant 1$时，因为

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{a\cdot\underbrace{1\cdot 1\cdots 1}_{(n-1)\text{个}}}\leqslant\frac{a+\overbrace{1+\cdots+1}^{(n-1)\text{个}}}{n}=\frac{a+(n-1)}{n},$$

所以，欲使

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1\leqslant\frac{a+(n-1)}{n}-1$$

$$=\frac{a-1}{n}<\frac{a}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\frac{a}{\varepsilon}$。于是，取$N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$，那么，任给$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

(ii) 当$0<a<1$时，因为

$$\sqrt[n]{a}=\sqrt{\underbrace{a\cdot 1\cdot 1\cdots 1}_{(n-1)\text{个}}}\geqslant\frac{n}{\frac{1}{a}+\underbrace{\frac{1}{1}+\cdots+\frac{1}{1}}_{(n-1)\text{个}}}=\frac{n}{\frac{1}{a}+(n-1)},$$

所以，欲使

$$|\sqrt[n]{a}-1|=1-\sqrt[n]{a}=1-\sqrt[n]{a\cdot 1\cdots 1}$$

$$\leqslant 1-\frac{n}{\frac{1}{a}+(n-1)}=\frac{1-a}{1+(n-1)a}<\frac{1}{na}$$

$$<\varepsilon,$$

只要 $n>\frac{1}{\varepsilon a}$．于是，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon a}\right]$，那么，任给$\varepsilon>0$，存在$N=\left[\frac{1}{\varepsilon a}\right]$，当$n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

综合(i)，(ii)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0).$$

证法2 (i) 当 $a\geqslant 1$时，由贝努利（Bernoulli）不等式的特例（$a-1\leqslant\frac{a^n-1}{n}$）知：欲使

$$|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1\leqslant\frac{a-1}{n}<\frac{a}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\frac{a}{\varepsilon}$．于是，取$N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$，那么，任给 $\varepsilon>0$，存在$N=\left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$，当 $n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

(ii) 当$0<a<1$时，根据等式

$$(1-\gamma^n)=(1-\gamma)(1+\gamma+\cdots\cdots+\gamma^{n-1}),$$

欲使$|\sqrt[n]{a}-1|=1-\sqrt[n]{a}=\dfrac{1-a}{1+\sqrt[n]{a}+\cdots+\sqrt[n]{a^{n-1}}}\leqslant\dfrac{1-a}{n\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}}$

$$=\frac{(1-a)\sqrt[n]{a}}{na}<\frac{1-a}{na}<\frac{1}{na}<\varepsilon.$$

只要 $n>\left[\dfrac{1}{\varepsilon a}\right]$. 于是，取$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon a}\right]$，那么，任给$\varepsilon>0$，

存在$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon a}\right]$，当$n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon.$$

综合(i)，(ii)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\quad(a>0).$$

证法3 (i) 当$a\geq 1$时，同上。

(ii) 当$0<a<1$时，则$a^{-1}>1$，由(i)知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a^{-1}}=1,$$

所以，对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{a^{-1}}-1|<\varepsilon,$$

又对任何正整数$n$，$\sqrt[n]{a^{-1}}>1$，从而，对任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，有

$$\left|\sqrt[n]{a}-1\right|=\left|\sqrt[n]{a}\left(1-\sqrt[n]{a^{-1}}\right)\right|=\left|\frac{1-\sqrt[n]{a^{-1}}}{\sqrt[n]{a^{-1}}}\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{\sqrt[n]{a^{-1}}}<\varepsilon.$$

综合(i)，(ii)得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1\ (a>0)$$

说明　采用这样几种证法，无非是想告诉大家，用极限定义证明极限，方法很多，只要论证合理，便能殊途同归. 同时容易看出：不论是那种证法，它们的出发点都相同，目标也一致，都是由$|\sqrt[n]{a}-1|$起步，借不等式性质之助，采用逐次放大不等式的办法，最后由给定的$\varepsilon$,找到相应的$N$. 为什么能采用放大不等式的方法呢？这是由定义的特点所决定的. 定义只要求对事先给定的$\varepsilon$存在一个相应的$N$，至于$N$到底多么大则无关紧要. 从此例可以明显看出，对同一个$\varepsilon$采取不同的方法找到的$N$可能不相同.

例2　试证$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

证明　令$\sqrt[n]{n}=1+\alpha_n$，当$n>1$时，有

$$n=(1+\alpha_n)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\alpha_n^k>C_n^2\alpha_n^2=\frac{1}{2}n(n-1)\alpha_n^2,$$

即

$$\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

因此，欲使$|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1=\alpha_n<\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\frac{2}{\sqrt{n}}<\varepsilon$.

只要$n>\frac{4}{\varepsilon^2}$，于是取$N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$那么，任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，有

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

**说明** 这是逐次放大不等式的又一个例子．在此例的讨论中，我们利用二项式定理建立了一个不等式．其实利用此定理可以建立很多不等式，在极限证明中十分有用，希读者特加注意．

另外在本例的证明过程中曾假定 $n>1$，这种预先约定的办法，在极限证明题中常采用．人们自然要问，这样作是否合理？回答是肯定的．因为 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 是在极限过程进行到足够晚——对数列而言就是其下标 $n$ 足够大时实现就行，既然这样，我们当然可以预先假定极限过程已经进行到一个适当的程度，也就是说 $n$ 已经大过某个数（例如本例中的 1），以此为前提展开我们的讨论，最后又得到 $n>\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$ 时．有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$．显然此不等式是在条件 $n>1$ 和 $n>\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$ 都满足的前提下，这就必须取 $N=\max\left\{1,\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]\right\}$（当然，因 $N$ 至少取1，所以在这里只须简单地取 $N=\left[\frac{4}{\varepsilon^2}\right]$）．

**例 3** 试证 $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{x+1}=\frac{1}{2}$.

**证明** 考察

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{(2x+1)(x-1)}{2(x+1)}\right|$$

$$=\left|\frac{2x+1}{2(x+1)}\right|\left|x-1\right|,$$

因为 $x\to 1$，不妨假定 $x>0$ 且，$|x-1|<1$，从而，欲使

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{2x+1}{2(x+1)}\right|\left|x-1\right|<\left|x-1\right|<\varepsilon,$$

只要取$\delta=\min\{1, \varepsilon\}$，那么，任给$\varepsilon>0$，存在$\delta=\min\{1, \varepsilon\}$，当$0<|x-1|<\delta$时，有

$$\left|\frac{x^2}{x+1}-\frac{1}{2}\right|<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x+1}=1.$$

**说明** 关于函数极限的证明，其思想方法与数列极限的情况类似.有时也需要“预先约定”，也需要“适当放大”.

**例 4** 证明（柯西定理）若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

**证明** 首先考虑$a=0$的情况.

因为$x_n\to 0$（$n\to\infty$），所以，任给$\varepsilon>0$，存在$N_0$，当$n>N_0$时，有

$$|x_n|<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是当$n>N_0$时，有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|\leqslant\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_{N0}|}{n}+\frac{|x_{N0+1}+\cdots+x_n|}{n}$$

$$\leqslant\frac{|x_1+x_1+\cdots+x_{N0}|}{n}+\frac{|x_{N0+1}|+\cdots+|x_n|}{n}$$

$$<\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_{N0}|}{n}+\frac{(n-N_0)\varepsilon}{2n}$$

$$<\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_{N_0}|}{n}+\frac{\varepsilon}{2} \qquad (1)$$

又因为 $|x_1+x_2+\cdots+x_{N_0}|$ 是定数，所以，任给 $\varepsilon>0$，存在$N$（$N\geqslant N_0$），当$n>N$时，有

$$\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_{N_0}|}{n}<\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (2)$$

综（1），（2）两式，对任给$\varepsilon>0$，存在$N(N\geqslant N_0)$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right|<\frac{|x_1+x_2+\cdots+x_{N_0}|}{n}+\frac{\varepsilon}{2}$$

$$<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0.$$

其次，若$a\neq 0$，因$x_n\to a$（$n\to\infty$），令 $y_n=x_n-a$则 $y_n\to 0$（$n\to\infty$）.

根据前面的结果，就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=0.$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1-a)+\cdots+(x_n-a)}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=0,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=a.$$

说明　本例的证明有两个特点,希读者注意.其一,我们不是直接证明此例,而是首先证明其特殊情况,然后借特殊情况证明一般情况.它告诉人们,对给定的一个比较复杂的问题往往先解决它的特殊情况,它或在论证方法上给我们以启发,或使我们把一般情况过渡到特殊情况而解决. 这种方法对论证有些数学命题很重要;其二,在证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=0$ 时, 采用了分段讨论的办法, 即将一个连加式劈为两半, 分别加以估计, 这也是数学分析中的一种论证方法, 这种方法常用在连加式与连乘式的极限上.

例 5　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0$.

证明　(i)　若 $|a|\leqslant 1$, 显然.

(ii)　若 $|a|>1$, 则一定有自然数 $k\geqslant|a|$. 我们假定 $n\geqslant k\geqslant|a|$. 因此欲使

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|=\left|\frac{a^n}{n!}\right|=\frac{|a^n|}{n!}=\frac{\overbrace{|a|\cdot|a|\cdots|a|}^{n\text{个}}}{1\cdot2\cdots k(k+1)\cdots n}$$

$$=\left(\frac{|a|}{1}\cdot\frac{|a|}{2}\cdot\cdots\cdot\frac{|a|}{k}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{|a|}{k+1}\cdot\frac{|a|}{k+2}\cdots\cdot\cdots\frac{|a|}{n}\right)$$

$$\leqslant|a|^k\cdot\frac{|a|}{n}=\frac{|a|^{k+1}}{n}<\varepsilon,$$

只要 $n>\frac{|a|^{k+1}}{\varepsilon}$，且$n\geqslant k$，于是取$N=\max\left\{k,\left[\frac{|a|^{k+1}}{\varepsilon}\right]\right\}$，那么，任给$\varepsilon>0$，存在$N$，当$n>N$时，有

$$\left|\frac{a^n}{n!}-0\right|<\varepsilon。$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0。$$

例 6　试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty$。

证法 1　对任意正数$M$，由例 5 知$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{M^n}{n!}=0$，因此，对$\varepsilon=1$，存在自然数$N$，当$n>N$时，有

$$\frac{M^n}{n!}<1\text{ 即}M^n<n!\text{或}\sqrt[n]{n!}>M，$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty。$$

证法 2　因为

$$\sqrt[n]{n!}=\sqrt[n]{n(n-1)\cdots2\cdot1}\geqslant\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}$$

$$=\frac{1}{\dfrac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}}，$$

又因（见例 4）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}=0，$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=+\infty。$$

## 二　怎样用极限的性质证明与求极限

### 1　用极限的基本性质与四则运算

**例 7**　试证　$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0。$$

**证明**　因为对任给$\varepsilon>0$，必有$e^{\varepsilon}>1$，又因$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，根据极限的保号性，必有$N$，当$n>N$时，有

$$\sqrt[n]{n}<e^{\varepsilon},$$

两边取对数，有

$$\frac{\ln n}{n}<\varepsilon,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln n}{n}=0。$$

**例 8**　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$与$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$都存在，则

$$\lim_{n\to\infty}\max\{x_n,y_n\}=\max\{\lim_{n\to\infty}x_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n\}。$$

**证明**　设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$　　$\lim y_n=B$，因为

$$\max\{x_n,y_n\}=\frac{x_n+y_n+|x_n-y_n|}{2},\qquad(3)$$

根据极限的四则运算和绝对收敛性，对(3)式两边取极限得

$$\lim_{n\to\infty}\max\{x_n,y_n\}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n+y_n+|x_n-y_n|}{2}$$

$$=\frac{A+B+|A-B|}{2}$$

$$=\max\{A,B\}$$

$$=\max\{\lim_{n\to\infty}x_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n\}.$$

同法可证

$$\lim_{n\to\infty}\min\{x_n,y_n\}=\min\{\lim_{n\to\infty}x_n,\ \lim_{n\to\infty}y_n\}.$$

**说明** 此例反映了收敛数列的一个重要性质：求极限与取最大（小）值运算的逻辑次序可以交换，同时上述两个例子说明，在证明极限时，应该充分地利用极限的有关性质和运算。

**2 用夹定理**

**例 9** 设$a_1$，$a_2$，…，$a_m$为$m$个正数，试证

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^n+a_2{}^n+\cdots+a_m{}^n}=\max\{a_1,a_2,\cdots a_m\}.$$

**证明** 令$A=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}>0$，必有

$$A^n\leqslant a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n\leqslant mA^n,$$

或

$$A\leqslant\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}\leqslant\sqrt[n]{m}\,A.$$

又因，$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{m}=1$，根据夹定理就有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+a_2^n+\cdots+a_m^n}=A$$

$$=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}.$$

**例10** 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}$．

**解** 因为

$$
\begin{aligned}
n! &\leqslant 1!+2!+3!+\cdots+(n-1)!+n! \\
&\leqslant (n-2)(n-2)!+(n-1)!+n! \\
&\leqslant 2(n-1)!+n!,
\end{aligned}
$$

从而有

$$1\leqslant\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}\leqslant\frac{2}{n}+1,$$

根据夹定理就有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1!+2!+3!+\cdots+n!}{n!}=1.$$

**例11** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+x^n}$ $\quad(x\geqslant 0)$．

**解** (i) 当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，有

$$1\leqslant\sqrt[n]{1+x^n}\leqslant\sqrt[n]{2},$$

由夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=1.$$

(ii) 当 $x>1$ 时，有

$$x<\sqrt[n]{1+x^n}<\sqrt[n]{2x^n}=x\sqrt[n]{2}.$$

由夹定理知

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=x.$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+x^n}=\begin{cases}1 & 0\leqslant x\leqslant 1.\\ x & x>1.\end{cases}$$

## 3　用单调有界原理

例12　试证　$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$收敛。

证明　（i）　单调性：由几何平均≤算术平均，有

$$\sqrt[n+1]{x_n\cdot 1}=\sqrt[n+1]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot 1}\leqslant\frac{n\left(1+\frac{1}{n}\right)+1}{n+1}$$

$$=1+\frac{1}{n+1},$$

两边$n+1$次方得

$$x_n\leqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=x_{n+1},$$

所以，$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$单调上升。

（ii）　有界性：为此先证$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降，

由几何平均≥调和平均，有

$$\sqrt[n+2]{y_n\cdot 1}=\sqrt[n+2]{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}\cdot 1}$$

$$\geqslant\frac{n+2}{(n+1)\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)}+1}=1+\frac{1}{n+1},$$

两边$n+2$次方得

$$y_n\geqslant\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}=y_{n+1}\qquad(n=1,2,3,\cdots),$$

所以，$y_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$单调下降。

从而有

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}=y_n<y_1=4,$$

故 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$有界.

由单调有界原理，知$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$收敛，令其极限为$e$，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e.$$

例13 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=e.$

证明 令 $y_n=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}\cdots+\cdots\frac{1}{n!}$，显然$\{y_n\}$单调上升，又因

$$\begin{aligned}y_n&=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\&\leqslant 1+1+\frac{1}{2\cdot 1}+\frac{1}{3\cdot 2}+\cdots+\frac{1}{u(n-1)}\\&=2+\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\cdots+\\&\qquad\left(\frac{1}{n-2}-\frac{1}{n-1}\right)+\left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)\\&=3-\frac{1}{n}<3,\end{aligned}$$

所以$\{y_n\}$有界，由单调有界原理知$\{y_n\}$必收敛，下面证明它的极限为$e$，因为

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\left(\frac{1}{n}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{k!}\left(\frac{1}{n}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{n(n-1)(n-2)\cdots[n-(k-1)]}{n^{k}}\cdot\frac{1}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\cdot\frac{1}{k!}$$

$$\leqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=y_n.$$

即

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}\leqslant 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}=y_n.$$

两边取极限得

$$e\leqslant\lim_{n\to\infty}y_n. \qquad (4)$$

另一方面对固定的$n$，当$m>n$时，有

$$x_m=\left(1+\frac{1}{m}\right)^{m}=\sum_{k=0}^{m}C_m^k\left(\frac{1}{m}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{1}{k!}$$

$$>\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{1}{k!},$$

两边对$m$取极限得

$$\lim_{m\to\infty} x_m \geqslant \lim_{m\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{1}{m}\right)\left(1-\frac{2}{m}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{m}\right)\frac{1}{k!}$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!},$$

即 $e\geqslant\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=y_n$，从而

$$e\geqslant\lim_{n\to\infty} y_n. \qquad (5)$$

由(4)、(5)两式联合得

$$\lim_{n\to\infty} y_n=e.$$

鉴于$e$在数学分析中的重要作用，我们在此对$e$的性质和意义作简要介绍，供读者参考.

(i) $e$的性质

1° $e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}$ $(0<\theta_n<1)$.

证明 由例13 $\lim_{n\to\infty} x_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$知

$$0<e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}+\frac{1}{(n+2)!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots\right]$$

$$\leqslant\frac{1}{(n+1)!}\left[1+\frac{1}{n+2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots\right]$$

$$=\frac{1}{(n+1)!}\left[\frac{1}{1-\frac{1}{n+2}}\right]=\frac{1}{n!}\frac{n+2}{(n+1)^2}<\frac{1}{n\cdot n!},$$

即

$$0<\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)n\cdot n!<1.$$

令

$$\left(e-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)n\cdot n!=\theta_n \qquad (0<\theta_n<1),$$

从而有

$$e=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!}.$$

说明　本公式不仅为用多项式计算$e$的近似值提供了一个估计误差的方法，并且用它还可以证明$e$的无理性.

2°　$e$为无理数.

证明　反设$e$为有理数，令$e=\frac{p}{q}$($p,q$为互素的自然数)，于是有

$$e=\frac{p}{q}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{\theta_n}{n\cdot n!} \qquad (0<\theta_n<1),$$

即

$$\theta_n=\frac{n\cdot n!\cdot p}{q}-n\cdot n!\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!} \qquad (n=1,2,3,\cdots),$$

因此式对任何自然数都成立，取$n\geqslant q$，显然该式右端两项均为自然数，从而$\theta_n$为整数，但这是不可能的，故$e$为无理数。

这里我们还要指出，法国数学家埃尔米特（Hermite）于1873年证明了$e$不仅是一个无理数，而且还是一个超越数，即$e$不满足任何形如

$$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots+a_nx^n=0$$

的$n$次方程，其中$a_0$，$a_1$，…，$a_n$是一组不全为零的整数。

3° $\lim\limits_{n\to\infty}\theta_n=1$。

证明　因为

$$1>\theta_n=n\cdot n!\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}\right)$$

$$=n\cdot n!\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k!}$$

$$>\frac{n\cdot n!}{(n+1)!}=\frac{n}{n+1},$$

根据夹定理得

$$\lim_{n\to\infty}\theta_n=1.$$

以下几个性质证明从略（读者作为练习）：

4° $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi e n!)=2\pi$。

5° $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<e<\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n+1}$.

6° $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$.

$7°\quad 0<e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\frac{e}{n}$.

$8°\quad \left(\frac{n+1}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$.

$9°\quad \left(\frac{n}{e}\right)^n<n!<e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

（*ii*） *e*的作用和意义

首先，我们看看四位常用对数表是如何编制的？如果我们直接以10作底数，因为$\lg N=0.0001,\ 0.0002, 0.0003,\cdots$时，$N=10^{\frac{1}{10000}}$，$100^{\frac{1}{10000}}$，$1000^{\frac{1}{10000}}$，…所以必须将，10，100，1000，…开10000次方，这自然是困难的．为了解决这个问题，取$10^{10000}$作底数行不行呢？当$\log_{10^{10000}}N=0.0001$，0.0002，0.0003，…时，分别得出$N=10$，100，1000，…计算虽然方便了，但真数增加过快，一般的数在表上根本无法查出．因此，我们还要缩小底数，其原则是：为了避免开10000次方，底数应该形如$b^{10000}$；为了真数增加的速度减慢，$b$必须相当接近于1．这样，取$1.0001^{10000}$作底数，读者不妨进行试算，就会发现上面的两个困难基本上克服了．至于从这个表到常用对数表的转化，可以通过换底公式来实现．

由上面的简单叙述可知，为了便于编制第一张对数表，必须取形如$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$这样的数作底数，$n$越大（相当于表上位数越多），表就越精确，所以“最”精确的表就应当取$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$作底数，这种对数称为自然对数．

自然界中很多变化规律，它们的变化速度与这个量本身成正比（例如放射性元素的衰变，复利率等）。也就是说：反映自然规律的函数关系，它们的变化速度与函数值成正比。我们可以证明，一个函数其变化速度与函数值成正比，当且仅当该函数是以 $e$ 为底的指数函数。

下面我们再计算函数 $y=\log_a x$ 的变化率，即求此函数在一点 $x_0$ 处的如下极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a x-\log_a x_0}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\log_a\frac{x}{x_0}}{x-x_0}$$

$$=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\log_a\frac{x}{x_0}.$$

令 $\Delta x=x-x_0$，则当 $x\to x_0$ 时，$\Delta x\to 0$，这样

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\log_a\frac{x}{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\cdot\log_a\frac{x_0+\Delta x}{x_0}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\cdot\frac{x_0}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}$$

令 $\frac{x}{\Delta x}=\alpha$，则当 $\Delta x\to 0$ 时，$\alpha\to\infty$，又因

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}=e,$$

所以

$$\lim_{x\to x_0}\frac{1}{x-x_0}\log_a\frac{x}{x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x_0}\right)^{\frac{x_0}{\Delta x}}$$

$$=\lim_{\alpha\to\infty}\frac{1}{x_0}\log_a\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)^{\alpha}$$

$$=\frac{1}{x_0}\log_a e。$$

对指数函数$y=a^x$可以算出（读者作为练习）

$$\lim_{x\to x_0}\frac{a^x-a^{x_0}}{x-x_0}=a^{x_0}\ \frac{1}{\log_a e}.$$

从以上的两个极限我们明显地看到：对于以不等于1的任何正数$a$为底的对数函数与指数函数，它们的上述极限值都和$e$有关。倘若取$e$为对数函数与指数函数的底，那么此极限值分别为$\frac{1}{x_0}$与$e^{x_0}$。前后相比之下，显然后者的表达式简单得多。综上所述，可知$e$在分析中占有重要的地位。

例14　试证　$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n$收敛。

证明　由前面列出的不等式5°易得

$$\frac{1}{k+1}<\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)<\frac{1}{k}\qquad(k=1,\ 2\cdots n)$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n}\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)=\sum_{k=1}^{n}\ln\left(\frac{k+1}{k}\right)$$

$$=\ln\left(\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdots\frac{n+1}{n}\right)$$

$$= \ln(n+1) < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k},$$

即

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n+1) > 0,$$

从而有

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln n > 0.$$

又因

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

所以

$$x_n - x_{n+1} = \left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}\right) - \ln n\right] - \left[\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k} - \ln(n+1)\right],$$

$$= \ln(n+1) - \ln n - \frac{1}{n+1}$$

$$= \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} > 0,$$

即

$$x_n > x_{n+1} \qquad (n = 1, 2, 3 \cdots).$$

故$\{x_n\}$单调下降且有界，根据单调有界原理知$\{x_n\}$收敛。

我们记

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right) = c,$$

其中$c=0.577215664\cdots$。人们称$c$为欧拉（Euler）常数.欧拉常数是有理数还是无理数，目前尚未搞清.

例15　设$x_1=\sqrt{c}$，$x_{n+1}=\sqrt{c+x_n}$,求$x_n=\sqrt{c+x_{n-1}}$（$c>0$）的极限.

证明　首先，用数学归纳法证明其单调递增，即$x_{n+1}>x_n$。

当$n=1$时，有$x_2=\sqrt{c+x_1}=\sqrt{c+\sqrt{c}}>\sqrt{c}=x_1$。现假设$n=k$时，$x_{k+1}>x_k$。则当$n=k+1$时，有$x_{k+2}=\sqrt{c+x_{k+1}}>\sqrt{c+x_k}=x_{k+1}$，所以对任何自然数$n$都有

$$x_{n+1}>x_n.$$

其次，证明$\{x_n\}$有界，因为

$$x_n=\sqrt{c+x_{n-1}},$$

所以，对任何$n$，$x_n>\sqrt{c}$。并且

$$x_n^2=c+x_{n-1},$$

因此

$$x_n=\frac{c}{x_n}+\frac{x_n-1}{x_n}\leqslant\frac{c}{\sqrt{c}}+1=\sqrt{c}+1.$$

由$n$的任意性得知数列$\{x_n\}$有界。根据单调有界原理，知数列$\{x_n\}$收敛.设其极限为$A$，

即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

因为

$$x_n^2=c+x_{n-1},$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} x_n^2 = \lim_{n\to\infty}(c + x_{n-1}),$$

从而有

$$A^2 = A + c.$$

这就是说数列 $\{x_n\}$ 的极限满足上述方程. 然而该方程有两个解:

$$A_1 = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2} > 0, \quad A_2 = \frac{1-\sqrt{1+4c}}{2} < 0.$$

但收敛数列的极限是唯一的, 所以还必须再根据收敛数列的性质加以挑选. 根据极限的保号性我们可以断定

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A_1 = \frac{1+\sqrt{1+4c}}{2}.$$

例16 求 $x_n = \frac{1}{2}\left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right)$ $(x_0 > 0, a > 0)$ 的极限.

证明 因为 $x_n > 0$, 所以有

$$x_n = \frac{x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}}{2} \geqslant \sqrt{x_{n-1} \frac{a}{x_{n-1}}} = \sqrt{a}.$$

又因

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{x_n^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2}\right) = 1$$

$$(n = 1, 2, \cdots),$$

故 $\{x_n\}$ 单调下降且有界, 所以必收敛. 设其极限为 $A$, 即

$$\lim_{n\to\infty} x_n = A.$$

因为

$$x_n=\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right),$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(x_{n-1}+\frac{a}{x_{n-1}}\right),$$

从而有

$$A=\frac{1}{2}\left(A+\frac{a}{A}\right) \text{ 或 } A^2-a=0.$$

此方程的解为

$$A_1=\sqrt{a}, \quad A_2=-\sqrt{a}.$$

又因

$$x_n\geqslant\sqrt{a},$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\sqrt{a}.$$

例17 设$a$，$b$是两个已知数，且$a>b>0$。现以$a$，$b$为出发点，连续作相邻的算术平均值和调和平均值，构造两个数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$如下：

$$x_1=\frac{a+b}{2}, \qquad y_1=\frac{2ab}{a+b};$$

$$x_2=\frac{x_1+y_1}{2}, \qquad y_2=\frac{2x_1y_1}{x_1+y_1};$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots$$

$$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}, \qquad y_n=\frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}};$$

$$\cdots \quad \cdots \qquad \cdots \quad \cdots$$

证明数列$\{x_n\}$与$\{y_n\}$收敛且极限都等于$\sqrt{ab}$。

证明　因为$a>b>0$，有

$$\frac{a+b}{2}>\sqrt{ab},$$

故

$$\frac{a+b}{2}>\frac{2ab}{a+b},$$

即

$$x_1>y_1.$$

由数学归纳法可证

$$x_n>y_n \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{6}$$

所以

$$x_{n+1}<\frac{x_n+x_n}{2}=x_n \ (n=1,2,\cdots). \tag{7}$$

同法可证

$$y_{n+1}>y_n \qquad (n=1,2,\cdots). \tag{8}$$

联合（6）（7）（8）式可得

$$\frac{2ab}{a+b}=y_1\leqslant y_n<y_{n+1}<x_{n+1}<x_n\leqslant x_1=\frac{a+b}{2}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

由于$\{x_n\}$与$\{y_n\}$单调有界，所以$\{x_n\}$与$\{y_n\}$必收敛，设其极限分别为$A$与$B$。由等式

$$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$$

知

$$A=\frac{A+B}{2},$$

即

$A = B$。

下面再证明$A=\sqrt{ab}$.

由数列的通项知$x_n y_n = x_{n-1} y_{n-1} = \cdots = x_1 y_1 = ab$，从而

$$y_n = \frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}} = \frac{2ab}{x_{n-1}+y_{n-1}},$$

两边取极限，得

$$A = \frac{2ab}{2A},$$

故

$$A = \sqrt{ab}.$$

例18　设$x_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (2n)}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

因为　$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2} > 0$ 故$\{x_n\}$单调递减有界，根据单调有界原理知$\{x_n\}$收敛。

令$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，由于

$$x_{n+1} = x_n \cdot \frac{2n+1}{2n+2},$$

两边取极限，得

$$A = 1 \cdot A$$

这时$A$不能确定，但用夹定理可以求出$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

考察$y_n = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \cdots \cdot \frac{2n}{2n+1}$，由于$y_n$中每一个因子都比$x_n = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \cdots \cdot \frac{2n-1}{2n}$中相应的因子大。

故有

$$0<x_n<y_n,$$

从而有

$$0<x_n^2<x_ny_n=\frac{1}{2n+1},$$

所以

$$0<x_n<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

又因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}=0$，由夹定理得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=0.$$

说明 (i) 当用单调有界原理断定数列极限存在后，为了求出该数列的极限$A$，可以解最后得到的关于$A$的方程，如例15——例16所示。

(ii) 如果最后得到的方程呈$A=A$时（如例17，直接从$x_n=\frac{x_{n-1}+y_{n-1}}{2}$或$y_n=\frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}$两边取极限，得到的方程都是$A=A$），方程没有确定的解，此时根据数列自身的特征$\left(\text{如}y_n=\frac{2x_{n-1}y_{n-1}}{x_{n-1}+y_{n-1}}=\frac{2ab}{x_{n-1}+y_{n-1}}\right)$，通过恒等变形，还是可以把$A$确定下来的。

(iii) 对于例18，利用单调有界原理，虽然断定其极限存在，但最后得到的方程呈$A=1\cdot A$的形式，这时对所给数列的通项无论采用怎样的变形，亦不能改变$A=1\cdot A$的形式，在此情况下，只有循求别法来求其极限。

例19 设$a\geqslant-3$，令

$$x_1=\frac{a}{2},\quad x_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{x_n^2}{2}\qquad(n=1,2,3\cdots),$$

问$a$取何值时，数列$\{x_n\}$收敛并求其极限。

解　假设$\{x_n\}$收敛且极限为$A$，则

$$\lim_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{2}+\frac{x_n^2}{2}\right),$$

$$A=\frac{a}{2}+\frac{A^2}{2}\text{或}A^2-2A+a=0,$$

因此

$$A=1\pm\sqrt{1-a}.$$

故当$a>1$时，数列$\{x_n\}$不可能收敛。

下面我们仅考虑$a$在$[-3,1]$之中的情况。

(i)　若$0\leqslant a\leqslant 1$，则$x_n\geqslant 0$．同时，用数学归纳法易证$x_n<1$，$x_n<x_{n+1}$（$n=1,2,\cdots$）．这样，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$不仅存在且不可能大于1，因而只能是$1-\sqrt{a}$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-a}.$$

(ii)　若$-3\leqslant a<0$，此时显然有

$$x_n\geqslant\frac{a}{2}\qquad(n=1,2,\cdots).$$

同时，用数学归纳法可以证明$x_n<0$（$n=1,2,\cdots$）。

事实上，$x_1<0$是显然的，设$x_n<0$，则由$x_n\geqslant\frac{a}{2}$及$a<0$，有

$$|x_n|\leqslant\frac{|a|}{2}\text{或}x_n^2\leqslant\frac{|a|^2}{4}.$$

又因$-3\leqslant a<0$，所以$\frac{|a|}{4}<1$，故

$$x_n^2\leqslant\frac{|a|^2}{4}<|a|.$$

这样，$x_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{x_n{}^2}{2}$应与$\frac{a}{2}$同号，即$x_{n+1}<0$，因而对所有的$n$，有

$$x_n<0.$$

这就证明了$\{x_n\}$是有界的，但它不是单调的，因为我们可用数学归纳法证明，对任何自然数$k$都有

$$x_{2k+1}-x_{2k-1}=\frac{1}{2}(x_{2k}^2-x_{2k-2}^2)>0,$$

$$x_{2k+2}-x_{2k}=\frac{1}{2}(x_{2k+1}^2-x_{2k-1}^2)<0.$$

这就是说$\{x_n\}$不单调，但它的奇数项与偶数项分别构成两个单调有界数列．从而可设

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k}=A,\qquad \lim_{k\to\infty}x_{2k+1}=B.$$

现在证明$A=B$．由$x_{n+1}=\frac{a}{2}+\frac{x_n}{2}$知

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a}{2}+\frac{x_{2k-1}^2}{2}\right),$$

$$\lim_{k\to\infty}x_{2k+1}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{a}{2}+\frac{x_{2k}^2}{2}.\right)$$

于是

$$A=\frac{1}{2}(a+B^2),\qquad B=\frac{1}{2}(a+A^2),$$

两式相减得

$$(A-B)(A+B+2)=0.$$

又当$a>-3$时，因子$A+B+2$不可能等于零．

否则，以$B=-A-2$代入$B=\frac{1}{2}(a+A^2)$，得

$$A^2+2A+(4+a)=0$$

但在$a>-3$时它没有实根，与$A$为实数矛盾。因此必有

$$A=B.$$

最后，$a=-3$时，$A-B$与$A+B+2$都等于零，因为此时$A=B=-1$。

这样，不论在哪种情形都有$A=B$，从而$\{x_n\}$收敛。由于$x_n<0$，所以$\{x_n\}$的极限值不能是正的，故有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1-\sqrt{1-a}.$$

说明　通过此例的讨论，告诉我们两件事：其一，一个有界数列虽然从整体上看并不单调，但是只要它的奇数项与偶数项分别构成两个单调子列，同样可以判定其收敛与发散性；其二，前面的例子告诉我们，用递归方式定义的数列，在已知其极限存在的前提下，往往可以通过解代数方程将其极限值求出，此例告诉我们，对这类数列，通过解代数方程还可以判定其发散性。

**4　用柯西收敛准则**

例20　设$x_n=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$，试证数列$\{x_n\}$收敛。

证明　因为

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}$$

$$<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$

$$=\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)+\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\cdots+$$

$$\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n},$$

所以，对任给$\varepsilon>0$，取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，当$n>N$时，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\frac{1}{n}<\varepsilon \qquad (p=1,2,3,\cdots),$$

根据柯西收敛准则，数列$\{x_n\}$收敛。

例21 设$x_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}$，试证数列$\{x_n\}$收敛。

证明 估计

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}\right|$$

$$=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{(-1)^{p-1}}{n+p}\right|$$

(i) 当$p=2k-1$，$k=1,2,3,\cdots$时，有

$$|x_{n+p}-x_n|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}+\frac{1}{n+p}\right|$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)+\frac{1}{n+p}$$

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n};\qquad(9)$$

(ii) 当$p=2k$, $k=1$, 2, 3, …时，有

$$\left|x_{n+p}-x_n\right|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots+\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right|$$

$$=\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)+\left(\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right)$$

$$=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots-\frac{1}{n+p}$$

$$<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.\qquad(10)$$

综合(9)、(10)式,得知：对任给$\varepsilon>0$,取$N=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$,当$n>N$时，有

$$|x_{n+p}-x_n|<\varepsilon,$$

故数列$\{x_n\}$收敛。

例22　设$a$为一常数，若数列$\{x_n\}$满足条件

$$\sum_{k=2}^{n}\left|x_k-x_{k-1}\right|<a,\quad n=2,3,4\cdots$$

则$\{x_n\}$必收敛。

证明　令 $y_n=\sum\limits_{k=2}^{n}\left|x_k-x_{k-1}\right|$，$n=2,3,4,\cdots$，

显然，数列 $\{y_n\}$ 有界且单调，故必收敛．根据柯西收敛准则，得知：对任给$\varepsilon>0$，存在N，当$n>N$时，有

$$\left|y_{n+p}-y_n\right|=\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|x_k-x_{k-1}\right|<\varepsilon,$$

$$p=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

从而有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&=|(x_{n+p}-x_{n+p-1})+(x_{n+p-1}-x_{n+p-2})\\&\quad+\cdots+(x_{n+1}-x_n)|\\&\leqslant\sum_{k=n+1}^{n+p}\left|x_k-x_{k-1}\right|<\varepsilon,\end{aligned}$$

由柯西收敛准则数列 $\{x_n\}$ 收敛．

例23　求方程$x=q\sin x+a$　$(0<q<1)$　的根．

解　作一个近似根的数列：

$x_0=a$，

$x_1=q\sin x_0+a$，

$x_2=q\sin x_1+a$，

…………

$x_n=q\sin x_{n-1}+a$，

$x_{n+1}=q\sin x_n+a$，

…………

下面我们证明数列 $\{x_n\}$ 是收敛的，且其极限值就是该方程的唯一解．因为

$$|x_1-x_0|=|q\sin x_0+a-a|=q|\sin x_0|\leqslant q,$$

$$\begin{aligned}|x_2-x_1|&=|q\sin x_1-q\sin x_0|\\&=q|\sin x_1-\sin x_0|\\&=q\left|2\sin\frac{x_1-x_0}{2}\cos\frac{x_1+x_0}{2}\right|\\&\leqslant q\cdot 2\cdot\frac{|x_1-x_0|}{2}\leqslant q|x_1-x_0|<q^2,\end{aligned}$$

一般地

$$|x_n-x_{n-1}|\leqslant q^n,\quad n=1,2,3,\cdots$$

从而有

$$\sum_{k=1}^{n}|x_k-x_{k-1}|\leqslant\sum_{k=1}^{n}q^k<\sum_{k=1}^{\infty}q^k=\frac{q}{1-q}.$$

故由上例知，数列$\{x_n\}$收敛．设其极限为$A$，即

$$\lim_{n\to\infty}x_n=A.$$

由$x_n=q\sin x_{n-1}+a$两边取极限得

$$A=q\sin A+a,$$

可见$A$满足方程$x=q\sin x+a$.

下面再证明$A$是此方程的唯一解．反设还有一个根$B$，于是

$$B=q\sin B+a$$

成立，从而有

$$|A-B|=q|\sin A-\sin B|\leqslant q|A-B|,$$

即

$$q\geqslant 1,$$

与题设矛盾．故知$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$是方程$x=q\sin x+a$（$0<q$

<1）的唯一解.

这个方程称为开卜勒（Kepler）方程，被用于确定行星在其轨道上的位置.

例24 设$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{k}(|q|<1)$，试证数列$\{x_n\}$收敛

证明 因$|q|<1$，故可写成$|q|=\frac{1}{1+\lambda}$，$\lambda>0$．令$m>n$，估计

$$|x_m-x_n|=\left|\sum_{k=n+1}^{m}\frac{q^k}{k}\right|\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{|q|^k}{k}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(1+\lambda)^k}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k(1+k\lambda+\cdots+\lambda^k)}$$

$$=\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k+k^2\lambda+\cdots+k\lambda^k}$$

$$\leqslant\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k^2\lambda}<\frac{1}{\lambda}\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{(k-1)k}$$

$$=\frac{1}{\lambda}\sum_{k=n+1}^{m}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)<\frac{1}{\lambda n},$$

从而，对任给$\varepsilon>0$，取 $N=\left[\frac{1}{2\varepsilon}\right]$，则对任何满足$m>n>N$的$m$和$n$，有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon,$$

故数列$\{x_n\}$收敛。

说明　从以上的例子容易看出，利用柯西收敛准则判定数列的收敛性，在程序与格调上和用$\varepsilon$—$N$定义验证数列极限的方法相似。但要注意这里增加了一个因素$p$，由于这里$N$仅与$\varepsilon$有关而和$p$没有从属关系，故在寻求$N$时，必须设法把$p$“撵走”。

另外还可看到，利用柯西收敛准则判定数列的收敛性，不仅不必要预先知道其极限值，而且对被审查的数列也没有象单调有界原理要求的条件那样“苛刻”。因此给人们带来很大的方便，于是它就理所当然地身价百倍，取得了“准则”的美誉。

## 三　怎样用恒等变换求极限

某些数列虽然表面很繁杂，不能直接用极限的运算法则求出其极限，但通过代数与三角中的基本公式恒等变形，或通过并项和拆项的技巧后，可以使原式变为简单，达到求出极限的目的。

例25　设$x_n=[(\sqrt{3}-2\sqrt{2}+\sqrt{1})$

$$+(\sqrt{4}-2\sqrt{3}+\sqrt{2})+\cdots$$

$$+(\sqrt{n+2}-2\sqrt{n+1}+\sqrt{n})],$$

求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-2\sqrt{k+1}+\sqrt{k})$

$$=\sum_{k=1}^{n}[(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+1}-\sqrt{k})$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-[(\sqrt{2}-\sqrt{1})$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})]$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})-\sum_{k=1}^{n-1}(\sqrt{k+2}-\sqrt{k+1})$$

$$-(\sqrt{2}-\sqrt{1})$$

$$=(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1})-(\sqrt{2}-1)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-(\sqrt{2}-1)$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n+1}}-\sqrt{2}+1\right)$$

$$=1-\sqrt{2}.$$

例26 设 $x_n=\frac{1}{2\cdot3\cdot4}+\cdots+\frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$，求$\lim_{n\to\infty}x_n$。

解 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+3)-(k+1)}{2(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)(k+2)}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+2)(k+3)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)-\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)-\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\right)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)。$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\right)=\frac{1}{12}。$$

例27 设$x_n=\frac{1^3+4^3+\cdots+(3n-2)^3}{[1+4+\cdots+(3n-2)]^2}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

解 $x_n=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}(3k-2)^3}{\left[\sum\limits_{k=1}^{n}(3k-2)\right]^2}$

$$
=\frac{\sum_{k=1}^{n}(27k^3-54k^2+36k-8)}{\left[\sum_{k=1}^{n}(3k-2)\right]^2}
$$

$$
=\frac{27\sum_{k=1}^{n}k^3-54\sum_{k=1}^{n}k^2+36\sum_{k=1}^{n}k-8n}{\left(3\sum_{k=1}^{n}k-2n\right)^2}
$$

$$
=\frac{27\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2-54\left[\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right]}{\left[\frac{3}{2}n(n+1)-2n\right]^2}
$$

$$
+\frac{36\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]-8n}{\left[\frac{3}{2}n(n+1)-2n\right]^2}
$$

$$
=\frac{4\left\{27\left[\frac{1}{2}n(n+1)\right]^2-9n(n+1)(2n+1)\right.}{4\left[\frac{3}{2}n(n+1)-2n\right]^2}
$$

$$
+\frac{\left.18n(n+1)-8n\right\}}{4\left[\frac{3}{2}n(n+1)-2n\right]^2}
$$

$$
=\frac{27n^2(n+1)^2-36n(n+1)(2n+1)}{n^2(3n-1)^2}
$$

$$
+\frac{27n(n+1)-32n}{n^2(3n-1)^2}
$$

$$= 27\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^2 - 36\frac{(n+1)(2n+1)}{n(3n-1)^2}$$

$$+ 72\frac{n+1}{n(3n-1)^2} - \frac{32}{n(3n-1)^2}.$$

上式从第二项起分母中$n$的次数高于分子中$n$的次数，所以这些项的极限均为零。故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 27\left(\frac{n+1}{3n-1}\right)^2 = 3.$$

例28　设$x_n = \frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n}$，求 $\lim_{n\to\infty} x_n$。

解　$x_n = 2\left(x_n - \frac{x_n}{2}\right)$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2^2} + \cdots + \frac{n}{2^n} - \frac{1}{2^2} - \frac{2}{2^3} - \cdots - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2\left[\frac{1}{2} + \left(\frac{2}{2^2} - \frac{1}{2^2}\right) + \left(\frac{3}{2^3} - \frac{2}{2^3}\right) + \cdots\right.$$

$$\left. + \left(\frac{n}{2^n} - \frac{n-1}{2^n}\right) - \frac{n}{2^{n+1}}\right]$$

$$= 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \cdots + \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\right)$$

$$= 2\left(1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\right).$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} 2\left(1 - \frac{1}{2^n} - \frac{n}{2^{n+1}}\right) = 2.$$

例29　设$x_n = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} + \frac{5}{2^3} + \cdots + \frac{2n-1}{2^n}$，求$\lim_{n\to\infty} x_n$。

解　$x_n = 2x_n - x_n$

$$= 2\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$-\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}\right)$$

$$= 1+\frac{3}{2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2^2}-\cdots-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1+\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{5}{2^2}-\frac{3}{2^2}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{2n-1}{2^{n-1}}-\frac{2n-3}{2^{n-1}}\right)-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}$$

$$= 3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\left(3-\frac{1}{2^{n-2}}-\frac{2n-1}{2^n}\right)=3.$$

例30　设$x_n = \frac{1}{n}\left\{\left(x+\frac{a}{n}\right)^2+\left(x+\frac{2a}{n}\right)^2+\cdots\right.$
$\left.+\left[x+\frac{(n-1)a}{n}\right]^2\right\}$，求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$。

解　$x_n = \sum\limits_{k=2}^{n}\frac{1}{n}\left(x+\frac{(k-1)a}{n}\right)^2$

$$=\frac{1}{n}\sum_{k=2}^{n}\left(x^2+2x\frac{(k-1)a}{n}+\frac{(k-1)^2a^2}{n^2}\right)$$

$$=\frac{1}{n}\left[\sum_{k=2}^{n}x^2+\sum_{k=2}^{n}\frac{2xa}{n}(k-1)+\sum_{k=2}^{n}\frac{a^2}{n^2}(k-1)^2\right]$$

$$=\frac{1}{n}(n-1)x^2+\frac{2xa}{n^2}\sum_{k=2}^{n}(k-1)+\frac{a^2}{n^3}\sum_{k=2}^{n}(k-1)^2$$

$$=\frac{(n-1)x^2}{n}+xa\frac{n(n-1)}{n^2}+\frac{a^2}{n^3}\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)x^2}{n}+\lim_{n\to\infty}xa\frac{n(n-1)}{n^2}$$

$$+\lim_{n\to\infty}\frac{a^2}{6}\frac{n(n-1)(2n-1)}{n^3}$$

$$=x^2+ax+\frac{a^2}{3}.$$

说明　以上这些例子显然都不能直接应用“和的极限等于极限和”的法则.求这类数列极限的关键步骤是首先应使$x_n$的被加项的项数不随$n$的变化而变化,这样就有可能用四则运算的法则求解. 具体做法一般有两种：其一是欲擒先纵的手法，就是本想收，先行拆，拆而相消，达到收拢；另一种是利用一些公式，使原式化繁为简.

例31　设$x_n=\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{1}{9}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$, 求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

解　$x_n=\frac{4-1}{2^2}\cdot\frac{9-1}{3^2}\cdot\cdots\cdot\frac{n^2-1}{n^2}$

$$=\frac{(2-1)(2+1)}{2^2}\cdot\frac{(3-1)(3+1)}{3^2}\cdot\cdots$$

$$\cdot\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n-1)(n+1)}{2^2 \cdot 3^2 \cdot \cdots \cdot n^2}$$

$$= \frac{(n-1)!(n+1)!}{2(n!)^2}$$

$$= \frac{n+1}{2n}.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}.$$

例32 设$x_n = \left(1 - \frac{2}{2 \cdot 3}\right)\left(1 - \frac{2}{3 \cdot 4}\right)\cdots\left(1 - \frac{2}{n(n+1)}\right)$，

求$\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 $x_n = \prod\limits_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$

$$= \prod_{k=2}^{n}\frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$$

$$= \frac{[1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \cdots \cdot (n-1)][4 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (n+2)]}{[2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot n][3 \cdot 4 \cdot \cdots \cdot (n+1)]}$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{n+2}{3}$$

$$= \frac{n+2}{3n}.$$

故有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n+2}{3n} = \frac{1}{3}.$$

**例33** 设 $x_n=\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$，求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$.

**解** 对$\sin x$反复应用倍角公式有

$$\sin x=2^n\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\sin\frac{x}{2^n},$$

所以

$$x_n=\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}.$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=1,$$

故

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cdots\cos\frac{x}{2^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin x}{x}.$$

当 $x=\frac{\pi}{2}$时，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{\pi}.$$

说明 连乘式和连加式基本相似，关键都是欲收先放，

不过前者是拆而相消，后者却是拆而相约．同时对连乘式 $x_n=a_1a_2\cdots a_n$，当$a_k>0$（$k=1$，2，$\cdots n$）时，可以化成连加式加以处理．事实上

$$x_n=a_1a_2\cdots a_n=e^{\ln a_1a_2\cdots a_n}$$
$$=e^{\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n}$$

由指数函数的连续性，有

$$\lim_{n\to\infty}x_n=e^{\lim\limits_{n\to\infty}(\ln a_1+\ln a_2+\cdots+\ln a_n)}.$$

## 四　怎样用函数的连续性求极限

函数$f(x)$在点$x_0$连续，即是$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，因此欲求连续函数在点$x_0$的极限，就是求函数$f(x)$在该点$x_0$的函数值，可按公式$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$或者$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(\lim\limits_{x\to x_0}x)$求出．我们知道一切初等函数在它的定义域上是连续的，判断初等函数在某点或某区间上是否连续，只要判断该点或该区间是在函数的定义域内就可以了．初等函数的这一特性给我们在求它的极限时带来了很大的方便．

例34　求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+2}+\dfrac{\ln(1+x^2)}{2\cos 3x}\right)$.

解　由于$x=0$属于函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+2}+\frac{\ln(1+x^2)}{2\cos 3x}$$

的定义域，故由函数连续的定义，有

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sqrt{x^2-2x+3}}{x+2}+\frac{\ln(1+x^2)}{2\cos 3x}\right)=f(0)=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例35 求 $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^3+\dfrac{\sin x}{x}}$.

解 由于 $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^3+\dfrac{\sin x}{x}\right)=1$ 及函数 $f(u)=\sqrt{u}$ 在点 $u_0=1$ 的连续性，所以

$$\lim_{x\to 0}\sqrt{x^3+\frac{\sin x}{x}}=\sqrt{\lim_{x\to 0}\left(x^3+\frac{\sin x}{x}\right)}$$

$$=\sqrt{1}=1.$$

说明 $f[\varphi(x)]$ 为复合函数，$\varphi(x)$ 在点 $x_0$ 无定义，但 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 存在且 $f(u)$ 在点 $\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)$ 连续，故有

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi(x)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

事实上，作

$$\varphi_1(x)=\begin{cases}\varphi(x) & x\neq x_0,\\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x) & x=x_0.\end{cases}$$

则 $\varphi_1(x)$ 在点 $x_0$ 连续。现考虑由 $f(u)$ 与 $u=\varphi_1(x)$ 复合所得的函数 $f[\varphi_1(x)]$. 因为 $\varphi_1(x)$ 在点 $x_0$ 连续，$f(u)$ 在 $u=\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=\varphi_1(x_0)$ 连续，所以 $f[\varphi_1(x)]$ 在点 $x_0$ 连续，从而

$$\lim_{x\to x_0}f[\varphi_1(x)]=f[\varphi_1(x_0)]=f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

但是 $f[\varphi(x)]$ 与 $f[\varphi_1(x)]$ 仅在一个点 $x_0$ 上的定义有区别，所以 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi(x)]$ 也存在且等于 $\lim\limits_{x\to x_0}f[\varphi_1(x)]$，因此

$$\lim_{x\to x_0} f[\varphi(x)] = f[\lim_{x\to x_0}\varphi(x)].$$

例36　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$　（$0<a\neq 1$）.

当 $x\to 0$ 时，式子$\dfrac{\log_a(1+x)}{x}$的分子、分母的极限都为 0，这是$\dfrac{0}{0}$型的待定式。在求极限的问题里，除了此种$\dfrac{0}{0}$型的待定式外，还有下列

$$\frac{\infty}{\infty},\ 0\cdot\infty,\ \infty-\infty,\ 0^0,\ \infty^0,\ 1^\infty,\ 0^\infty$$

型的待定式，其中 0 与∞分别表示无穷小量与无穷大量。后六种待定式都可以化为$\dfrac{0}{0}$与$\dfrac{\infty}{\infty}$型加以处理。

解　$\dfrac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$，当$x\to 0$时，$(1+x)^{\frac{1}{x}}\to e$，又由于$\log_a u$的连续性，故知

$$\lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\lim_{x\to 0}\log_a(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

$$=\log_a\left[\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}\right]=\log_a e.$$

特别，当$a=e$时，有 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$.

例37　求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a^x-1}{x}$.

解　令$a^x-1=y$，当$x\to 0$时，有$y\to 0$. 故

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\log_a(1+y)}$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\frac{\log_a(1+y)}{y}}$$

$$=\frac{1}{\log_a e}=\ln a.$$

特别，当 $a=e$时，有$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$．

例38　求证 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\mu$。

证明　令$(1+x)^\mu-1=y$，则 $\mu\ln(1+x)=\ln(1+y)$，并且，当$x\to 0$时，有$y\to 0$．故

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\mu-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\mu\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\right)$$

$$=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\mu\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}$$

$$=1\cdot\mu\cdot 1=\mu.$$

例39　设$\lim_{x\to x_0}u(x)=a>0$，$\lim_{x\to x_0}v(x)=b$，则

$$\lim_{x\to x_0}u(x)^{v(x)}=a^b.$$

证明　因为$\lim_{x\to x_0}u(x)=a>0$，故当$x\to x_0$时可设$u(x)>0$，从而$u(x)^{v(x)}=e^{v(x)\cdot\ln u(x)}$。

由指数函数、对数函数的连续性，有

$$\lim_{x\to x_0} u(x)^{v(x)} = \lim_{x\to x_0} e^{v(x)\cdot \ln u(x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\cdot \lim\limits_{x\to x_0} \ln u(x)}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to x_0} v(x)\cdot \ln\left(\lim\limits_{x\to x_0} u(x)\right)}$$

$$= e^{b\ln a} = a^b.$$

前述利用复合函数的连续性求函数极限的方法，对于 $x\to\infty$，$x\to\pm\infty$或$x\to x_0\pm 0$的情形也可使用．例如，我们有（证明留给读者）

**定理1**　若函数$y=f(u)$在点$u_0$连续，$u=\varphi(x)$当$x\to\infty$时的极限为$u_0$，则对复合函数$f[\varphi(x)]$，有

$$\lim_{x\to\infty} f[\varphi(x)] = f(u_0).$$

例40　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{2-\dfrac{\sin x}{x}}$．

解　由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，所以

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{2-\frac{\sin x}{x}} = \sqrt{2-\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}}$$

$$= \sqrt{2-0}$$

$$= \sqrt{2}.$$

## 五　怎样用等价代换求极限

为了陈述简便，先介绍几个重要概念和有关符号．

1　若$\frac{f(x)}{g(x)}\to 0\ (x\to x_0)$，则记

$$f(x)=0(g(x))(x\to x_0),$$

即　　$$f(x)=\alpha g(x)(x\to x_0\text{时}，\alpha\to 0).$$

若$x\to x_0$时$f(x)$是无穷小量，就表示为

$$f(x)=0(1).$$

特别，当$f(x)\to 0$，$g(x)\to 0\ (x\to x_0)$，且$\frac{f(x)}{g(x)}\to 0\ (x\to x_0)$时，则称$f(x)$是$g(x)$的高阶无穷小量。

2　若$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1\ (x\to x_0)$，则称$f(x)$与$g(x)$在$x\to x_0$时等价，记作

$$f(x)\sim g(x)(x\to x_0),$$

或

$$f(x)=g(x)+0(g(x))(x\to x_0).$$

两个互为等价的函数，有下面几个简单而重要的性质。

**定理2**（等价代换原理）　若$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，且$f(x)\to A(x\to x_0)$，则$g(x)\to A(x\to x_0)$。

**证明**　因为$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，则

$$\frac{g(x)}{f(x)}\to 1(x\to x_0).$$

又因为　$g(x)=\frac{g(x)}{f(x)}\cdot f(x)$，所以

$$g(x)\to 1\cdot A=A(x\to x_0).$$

由此可见，互为等价的函数，具有相同的极限。但反之不真，即具有相同极限的函数并不一定等价，例如

$$x^3\to 0(x\to 0)\text{及}x^2\to 0(x\to 0)，\text{但}\frac{x^3}{x^2}=x\to 0(x\to 0).$$

即$x^3$与$x^2$虽有相同的极限，但并非等价.

**定理3** $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$的充要条件是：

$$f(x)-g(x)=0(g(x))(x\to x_0)$$

或 $$f(x)-g(x)=0(f(x))(x\to x_0).$$

证明 必要性 若$f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，则

$$f(x)=g(x)+0(g(x))(x\to x_0).$$

即 $f(x)-g(x)=0(g(x))(x\to x_0)$. 类似地，有

$$f(x)-g(x)=0(f(x))(x\to x_0).$$

充分性 若 $f(x)-g(x)=0(g(x))(x\to x_0)$，从而有

$$\frac{f(x)-g(x)}{g(x)}=\frac{f(x)}{g(x)}-1\to 0\ (x\to x_0).$$

即当$x\to x_0$时，$\dfrac{f(x)}{g(x)}-1$是一个无穷小量，故有

$$\frac{f(x)}{g(x)}\to 1\ (x\to x_0).$$

所以 $$f(x)\sim g(x)(x\sim x_0).$$

如果 $f(x)-g(x)=0(f(x))(x-x_0)$，证法类似.

从定理3可知，若 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$

$=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$（$A$有限），则$|f(x)-g(x)|\to 0(x\to x_0)$，

这说明在点$x_0$的邻域上（或当$x$的绝对值无限增大时），用函数$f(x)$的值代替函数$g(x)$的值，其绝对误差$|f(x)-g(x)|$是一个无穷小量，因此$g(x)$的值可以用$f(x)$的值来近似表示. 但近似值的"好坏"，并不按绝对误差而是按相对误差来估计的，然而定理3告诉我们：若$f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$，则$f(x)-g(x)=0(g(x))(x\to x_0)$或$f(x)-g(x)$

$=0(f(x))(x\to x_0)$. 即$\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right|=0$（或$\lim\limits_{x\to x_0}\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{f(x)}\right|=0$），就是说它们的相对误差$\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right|$（或$\left|\dfrac{f(x)-g(x)}{g(x)}\right|$）也是一个无穷小量，从而在点$x_0$的邻域上（或当$x$的绝对值无限增大时），函数$g(x)$的值可以用$f(x)$的值"无限精确"地表示.

如果 $f(x)=g(x)+0(g(x))(x\to x_0)$，称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的主要部分（简称主部）. 因此两个互为等价的函数中，任何一个是另一个的主部.

**定理4** 若 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，且 $h(x)f(x)\to A(x\to x_0)$，则$h(x)g(x)\to A(x\to x_0)$.

证明 因为 $h(x)g(x)=\dfrac{g(x)}{f(x)}h(x)f(x)$，从而有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0}h(x)g(x)&=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}h(x)f(x)\\&=\lim_{x\to x_0}\frac{g(x)}{f(x)}\cdot\lim_{x\to x_0}h(x)f(x)\\&=1\cdot A=A.\end{aligned}$$

此定理指出，在计算两个函数乘积的极限时，可以把任一因子用和它等价的函数去替换. 不难把定理4推广到多于两个函数的乘积的情况去.

下面，将某些常用函数的等价函数列举出一些来，证明留给读者作为练习，以资运用.

$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n(a_0\neq0)$,

$p_n(x)\sim a_0x^n(|x|\to\infty)$;

$p_n(x)\sim a_n(x\to 0)$；

$\sin x\sim x\ (x\to 0)$；

$\operatorname{tg}x\sim x\ (x\to 0)$；

$\arcsin x\sim x\ (x\to 0)$；

$\operatorname{arctg}x\sim x\ (x\to 0)$；

$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}\ (x\to 0)$；

$\operatorname{tg}x-\sin x\sim\frac{x^3}{2}\ (x\to 0)$；

$e^x-1\sim x\ (x\to 0)$；

$a^x-1\sim x\ln a\ (x\to 0)$；

$\ln(1+x)\sim x\ (x\to 0)$；

$\log_a(1+x)\sim x\log_a e\ (x\to 0)$；

$(1+x)^a-1\sim ax\ (x\to 0)$；

$x^a-1\sim a(x-1)\ (x\to 1)$。

例41　求$\lim\limits_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)$，　$0<a\neq 1$。

解　因为 $(a^{\frac{1}{n}}-1)\sim\frac{1}{n}\ln a\ (n\to\infty)$，所以

$$\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)=\lim_{n\to\infty}n\cdot\frac{1}{n}\ln a$$
$$=\ln a.$$

例42　求 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2(x^2-100)^7\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1\right]}{x^{15}-11}$。

解　因为

$(x^2-100)^7\sim x^{14}\ (x\to\infty)$；

$\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1\right]=\frac{3}{x}+\frac{3}{x^2}+\frac{1}{x^3}\sim\frac{3}{x}\ (x\to\infty)$；

$$x^{15}-11 \sim x^{15}\ (x\to\infty).$$

所以

$$\frac{x^2(x^2-100)^7\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1\right]}{x^{15}-11} \sim \frac{x^2x^{14}\frac{3}{x}}{x^{15}}\quad (x\to\infty)$$

故有

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2(x^2-100)^7\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^3-1\right]}{x^{15}-11} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2x^{14}\frac{3}{x}}{x^{15}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}3 = 3.$$

例43 证明$\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=\dfrac{\sin 2x}{2x}$，式中

$$Q_n=\prod_{k=0}^{n}\cos\frac{x}{2^k},\quad x\neq 0.$$

证明 因为

$$\cos\frac{x}{2}=\frac{\sin x}{2\sin\frac{x}{2}},$$

$$\cos\frac{x}{2^2}=\frac{\sin\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2^2}},$$

………………

$$\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin\frac{x}{2^{n-1}}}{2\sin\frac{x}{2^n}},$$

将上述各式代入$Q_n$，得

$$Q_n=\frac{\cos x\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=\frac{2\sin x\cos x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}$$

$$=\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\sin\frac{x}{2^n}}\sim\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\cdot\frac{x}{2^n}}\quad(n\to\infty)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}Q_n=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin 2x}{2^{n+1}\frac{x}{2^n}}=\frac{\sin 2x}{2x}$.

例44 求 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\operatorname{arctg}3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$。

解 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\operatorname{arctg}3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\right)}{\operatorname{arctg}3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}},$$

因为，当 $x\to 0$ 时，$\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\to 0$， $3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}\to 0$,

故有

$$\ln\left(1+\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\right)\sim\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}},$$

$$\operatorname{arc\,tg}3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}\sim 3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}.$$

从而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(e^{\sin x}+\sqrt[3]{1-\cos x})-\sin x}{\operatorname{arc\,tg}3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(1+\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\right)}{\operatorname{arc\,tg}3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{e^{\sin x}}\cdot\frac{1}{3\sqrt[3]{1-\cos^2 x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1-\cos x}}{3e^{\sin x}\sqrt[3]{1-\cos x}\sqrt[3]{1+\cos x}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{3e^{\sin x}\sqrt[3]{1+\cos x}}$$

$$=\frac{1}{3\sqrt[3]{2}}.$$

例45 求$\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$.

解 $\lim\limits_{x\to\infty}x^3\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}\left(1-\cos\frac{1}{x}\right)}{\left(\frac{1}{x}\right)^3\cos\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\sin^2\frac{1}{2x}\cdot\sin\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3\cos\frac{1}{x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2\left(\frac{1}{2x}\right)^2\frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x}\right)^3\cos\frac{1}{x}}\quad\left[\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}(x\to\infty)\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\frac{1}{\cos\frac{1}{x}}=\frac{1}{2}.$$

一个函数用与它等价的函数去替换，必须按定理 4 的要求去作，不能越轨，假若滥用等价代换，将导致错误的结果．例如，若我们把等价代换在代数和中进行：

$$\lim_{x\to\infty} x^3 \left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)$$

$$=\lim_{x\to\infty} x^3\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=0.$$

这结果是错误的，因为，由$\operatorname{tg}\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}\ (x\to\infty)$，$\sin\frac{1}{x}\sim\frac{1}{x}$ $(x\to\infty)$，推不出$\left(\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\sin\frac{1}{x}\right)\sim\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\right)=0(x\to\infty)$，一般地说，虽然

$$f(x)\sim\bar{f}(x)(x\to x_0),\quad g(x)\sim\bar{g}(x)(x\to x_0),$$

但$(f(x)\pm g(x))\sim(\bar{f}(x)\pm\bar{g}(x))$不一定成立。

**定理5**　设 $f(x)\sim g(x)\ (x\to x_0)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（有限），又若 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a\ (>0)$，则

$$h(x)^{f(x)}\sim h(x)^{g(x)}\ (x\to x_0).$$

**证明**　已知 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$，$f(x)\to A$（有限）$(x\to x_0)$，由定理 2 知

$$|f(x)-g(x)|\to 0\ (x-x_0),$$

从而有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)^{f(x)}}{h(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}h(x)^{f(x)-g(x)}=a^\circ=1,$$

所以

$$h(x)^{f(x)}\sim h(x)^{g(x)}\ (x\to x_0).$$

特别，当 $h(x)=a(>0)$时，有

$$a^{f(x)}\sim a^{g(x)}\ (x\to x_0).$$

推论　设 $g(x)\sim m(x)(x\to x_0)$，$\ln f(x)\sim n(x)(x\to x_0)$，又若$g(x)$、$\ln f(x)$在$x\to x_0$时都趋于有限极限，且不为零，则

$$f(x)^{g(x)}\sim e^{m(x)n(x)}\ (x\to x_0).$$

证明　由条件知$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)\ln f(x)}{m(x)\ln f(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{g(x)}{m(x)}=1$，所以当 $x\to x_0$时，$g(x)\ln f(x)\sim m(x)\ln f(x)$. 同理，$m(x)\ln f(x)\sim m(x)n(x)$. 显然，“$\sim$”满足传递性，故有

$$g(x)\ln f(x)\sim m(x)n(x)\ (x\to x_0).$$

于是由定理 5，有

$$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\cdot\ln f(x)}\sim e^{m(x)\cdot n(x)}\ (x\to x_0).$$

注意(i)　在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A(\neq 0,\text{有限})$,条件$f(x)\sim g(x)$ $(x\to x_0)$与$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$是等价的，所以定理 5 的条件可以用后者来代替. 在$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$无限时，只要$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$，我们仍有

$$\lim_{x\to x_0}\frac{h(x)^{f(x)}}{h(x)^{g(x)}}=\lim_{x\to x_0}h(x)^{f(x)-g(x)}=a^{\circ}=1,$$

即$h(x)^{f(x)}\sim h(x)^{g(x)}(x\to x_0)$，所以定理 5 可加强为

**定理 5′**　如果$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$ 且$\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=a$ $(>0)$，则

$$h(x)^{f(x)}\sim h(x)^{g(x)}(x\to x_0).$$

但是在定理 5′中，条件 $\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)-g(x)]=0$不能代之以

$f(x) \sim g(x)(x \to x_0)$。

事实上，设$f(x)=x^2+x$，$g(x)=x^2$，则$f(x)\sim g(x)$ $(x\to\infty)$．又设$h(x)=1+\frac{1}{x}$，则$\lim_{x\to\infty}h(x)=1\ (>0)$。

因为

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\frac{h(x)^{f(x)}}{h(x)^{g(x)}} &= \lim_{x\to\infty}h(x)^{f(x)-g(x)}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x^2+x-x^2}\\ &= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\\ &= e\neq 1.\end{aligned}$$

所以

$$h(x)^{f(x)} \nsim h(x)^{g(x)}\ (x\to\infty).$$

（$ii$） 若将定理5推论中的条件换以$\lim_{x\to x_0}[g(x)-m(x)]=0$，$\lim_{x\to x_0}[\ln f(x)-n(x)]=0$，只要$\lim_{x\to x_0}g(x)$ 与$\lim_{x\to x_0}\ln f(x)$都有限且不为零，显然仍有

$$f(x)^{g(x)}\sim e^{m(x)n(x)}\ (x\to x_0).$$

但定理5推论中的条件却不能代之以$\lim_{x\to x_0}[g(x)-m(x)]=0$与$\lim_{x\to x_0}[\ln f(x)-n(x)]=0$.

事实上，设 $g(x)=x+\frac{1}{x}$，$m(x)=x$，$f(x)=\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x$，$n(x)=0$，则 $\lim_{x\to\infty}[g(x)-m(x)]=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$，

$\lim\limits_{x\to\infty}[\ln f(x)-n(x)] = \lim\limits_{x\to\infty}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2} = 0$. 但

$$\lim_{x\to\infty} f(x)^{g(x)} = \lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^x\right]^{x+\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{x^2+1}$$

$$= e,$$

$$\lim_{x\to\infty} e^{m(x)n(x)} = \lim_{x\to\infty} e^0 = 1.$$

所以

$$f(x)^{g(x)} \sim e^{m(x)n(x)}\ (x\to\infty).$$

下面举例说明这个定理及其推论在计算极限时的应用.

例46 求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.

解 因为 $\left(\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$ ($x\to 0$) 是 $1^\infty$ 型, 令

$$\frac{\cos x}{\cos 2x} = 1+\varepsilon(x),\ 且\ \varepsilon(x)\to 0\ (x\to 0),$$

则

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)}$$

$$= \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x^2}\ln(1+\varepsilon(x))}$$

$$= e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\cdot\varepsilon(x)}$$

由于 $\dfrac{\cos x}{\cos 2x}=1+\dfrac{\cos x-\cos 2x}{\cos 2x}=1+\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\sin\frac{3x}{2}}{\cos 2x}$，

所以 $\varepsilon(x)=\dfrac{2\sin\frac{x}{2}\sin\frac{3x}{2}}{\cos 2x}\sim\dfrac{2\cdot\frac{x}{2}\cdot\frac{3x}{2}}{1-2x^2}\ (x\to 0)$，

从而有 $$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\varepsilon(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x^2}\cdot\frac{3x^2}{2}}{1-2x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{3}{2}}{1-2x^2}=\frac{3}{2},$$

故 $$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\frac{3}{2}}.$$

说明　在幂指式 $f(x)^{g(x)}$ 中取极限时，作为底的 $f(x)$ 不能代之以与它等价的 $\bar{f}(x)$，如果以等价的函数去代换，将要导致各种不同的结果，如在例46中，作为底的 $\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$，用与其等价的函数代之，将有

(i)　由于 $\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\sim 1\ (x\to 0)$，故

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}1^{\frac{1}{x^2}}=1. \tag{11}$$

(ii)　由于 $\dfrac{\cos x}{\cos 2x}\sim\dfrac{1-\frac{x^2}{2}}{1-2x^2}\ (x\to 0)$，故

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1-\frac{x^2}{2}}{1-2x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\frac{3}{2}x^2}{1-2x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{\frac{3}{2}x^2}{1-2x^2}\right)^{\frac{1-2x^2}{\frac{3}{2}x^2}}\right]^{\frac{\frac{3}{2}}{1-2x^2}}$$

$$=e^{\frac{3}{2}} \tag{12}$$

(iii)　由于$\frac{\cos x}{\cos 2x}\sim\frac{1}{1-x^2}$（$x\to 0$），故

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos 2x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)^{\frac{1}{x^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left[\left(1+\frac{x^2}{1-x^2}\right)^{\frac{1-x^2}{x^2}}\right]^{\frac{1}{1-x^2}}=e. \tag{13}$$

在(11)、(12)、(13)式的计算过程中，都是对底$\frac{\cos x}{\cos 2x}$作了等价代换，然而导致了三种不同的结果，这正说明在幂指式$f(x)^{g(x)}$中，作为底的$f(x)$不能代之以与它等价的$\bar{f}(x)$而使$f(x)^{g(x)}\sim\bar{f}(x)^{g(x)}$成立。由于$f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$由定理 5 的推论可知，作为底的$f(x)$应在$e^{g(x)\ln f(x)}$中代之以与$\ln f(x)$等价的量。此时值得注意的是，不能认为$f(x)$

$\sim \bar{f}(x)$时，可以推导出$\ln f(x) \sim \ln \bar{f}(x)$，例如 $x^3+1\sim 1$ ($x\to 0$)，但$\ln(x^3+1)\sim x^3$ ($x\to 0$)。

例47　求 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}$。

解　令 $x=\frac{\pi}{2}-y$，则

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}(\sin x)^{\mathrm{tg}x}=\lim_{y\to 0}(\cos y)^{\frac{\cos y}{\sin y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}[1+(\cos y-1)]^{\frac{\cos y}{\sin y}}$$

$$=\lim_{y\to 0}e^{\frac{\cos y}{\sin y}\ln[1+(\cos y-1)]}$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\frac{\cos y}{\sin y}(\cos y-1)}$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\cos y\frac{\cos y-1}{\sin y}}$$

$$=e^{\lim\limits_{y\to 0}\cos y\left(-\frac{\sin\frac{y}{2}}{\cos\frac{y}{2}}\right)}$$

$$=e^{0}=1.$$

# 六　怎样用某些特殊性质求极限

下面着重介绍三个命题，运用它们求某些函数的极限极为方便。

命题 1　设 $\{x_n\}$，当 $n \geqslant N$ 时，有 $x_n > 0$ 和 $x_{n+1} \geqslant kx_n (k > 1)$，则 $x_n \to +\infty (n \to \infty)$。

证明　由于 $x_{n+1} \geqslant kx_n$（当 $n > N$ 时），容易看出

$$x_{N+m} \geqslant k^m x_N \qquad (m = 1, 2, 3, \cdots).$$

因为 $k > 1$，故有 $k^m \to +\infty (m \to \infty)$，又由于 $x_n > 0$，故亦有 $k^m x_N \to +\infty (m \to \infty)$。所以 $x_{N+m} \to \infty (m \to \infty)$，自然有 $x_n \to +\infty (n \to \infty)$。

推论 1　设 $\{x_n\}$，如果 $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = k > 1$，

则 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = \infty$。

证明　由于 $k > 1$，总存在某一个正数 $\varepsilon_0$，使得 $k - \varepsilon_0 > 1$。

对于给定的 $\varepsilon_0 > 0$，由于 $\lim\limits_{n \to \infty} \left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| = k$。必存在 $N$，

使当 $n > N$ 时，有

$$\left| \frac{x_{n+1}}{x_n} \right| > k - \varepsilon_0,$$

即 $|x_{n+1}| > (k - \varepsilon_0)|x_n|$。由命题1，就得 $\lim\limits_{n \to \infty} |x_n| = +\infty$，

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n=\infty.$$

命题 2　设 $\{x_n\}$，当 $n>N$ 时,有 $|x_{n+1}|\leqslant r|x_n|$ $(0<r<1)$，则 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$。

证明　由于 $|x_{n+1}|\leqslant r|x_n|$（当 $n>N$ 时），所以有

$$0\leqslant|x_{N+k}|\leqslant r^{k-1}|x_{N+1}|\ (k=2,3,\cdots). \qquad (14)$$

因为 $0<r<1$，故有 $r^{k-1}\to 0\ (k\to\infty)$，从而有

$$r^{k-1}|x_{N+1}|\to 0\ (k\to\infty).$$

由(14)式，根据夹定理得

$$|x_{N+k}|\to 0\ (k\to\infty).$$

自然有 $|x_n|\to 0\ (n\to\infty)$，故 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$。

推论 2　设 $\{x_n\}$，如果 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=r$，且 $0\leqslant r<1$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=0$。

证明　由于 $0\leqslant r<1$，总存在某一个正数 $\varepsilon_0$，使得 $0<r+\varepsilon_0<1$。

对于给定的 $\varepsilon_0>0$，由于 $\lim\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right|=r$，必存在 $N$，使当 $n>N$ 时，有

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|<r+\varepsilon_0,$$

即 $|x_{n+1}|<(r+\varepsilon_0)|x_n|$，由命题 2 就得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=0.$$

例48　设 $x_n=n^\alpha x^n\ (\alpha>0)$，证明

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & x\geqslant 1, \\ 0 & |x|<1, \\ \infty & x\leqslant -1. \end{cases}$$

证明　由于$\left|\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right| = \left|\dfrac{(n+1)^\alpha}{n^\alpha}\dfrac{x^{n+1}}{x^n}\right| = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^\alpha |x|$

$\to |x| (n\to\infty)$，所以

(i)　当$|x|<1$时，由推论2得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$.

(ii)　当$x>1$时，有$|x| = x>1$，并且$x_n>0$，由推论1得$\lim\limits_{n\to\alpha} x_n = +\infty$.

(iii)　当$x=1$时，有$x_n = n^\alpha \to +\infty (n\to\infty)$.

(iV)　当$x<-1$时，有$|x| = -x>1$，由推论1得$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

(V)　当$x=-1$时，有$x_n = (-1)^n n^\alpha \to \infty (n\to\infty)$.

综合上述，有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} +\infty & x\geqslant 1, \\ 0 & |x|<1, \\ \infty & x\leqslant -1. \end{cases}$$

同理可证：若$y_n = \dfrac{x^n}{n^\alpha}$（$\alpha>0$），则

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \begin{cases} +\infty & x>1, \\ 0 & |x|\leqslant 1, \\ \infty & x<-1. \end{cases}$$

例49　求$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!}$.

**解** 如果 $0<a<1$，则有 $a^n\to 0\ (n\to\infty)$，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

当 $a>1$ 时，$\frac{a^n}{n!}$ 是 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的待定式，由于

$$x_{n+1}=\frac{a}{n+1}x_n,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=0$，由推论 2 便得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^n}{n!}=0.$$

**例50** $\alpha$ 是一个异于零的任意实数，令 $\binom{\alpha}{0}=1$，$\binom{\alpha}{n}=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}\ (n=1,2,3,\cdots)$，证明 $|x|<1$ 时，$x_n=\binom{\alpha}{n}x^n\to 0\ (n\to\infty)$。

**证明**

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\left|\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)(\alpha-n)}{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}\cdot\frac{1}{n+1}\right|\cdot|x|$$

$$=\left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right|\cdot|x|\to|x|\ (n\to\infty).$$

故当 $|x|<1$ 时，由推论 2 便有 $x_n\to 0\ (n\to\infty)$。

**例51** 证明 $n!=0(n^n)\ (n\to\infty)$。

**证明** 设 $x_n=\frac{n!}{n^n}$，因为

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|=\left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}\right|=\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$$

$$=\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}\to\frac{1}{e}(n\to\infty),$$

由于 $0<\frac{1}{e}<1$，故由推论 2 便有 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。所以

$$n!=0(n^n)(n\to\infty).$$

命题 3　若 $f(x)\to1(x\to x_0)(|x_0|\leqslant\infty)$，但 $f(x)\neq1$，$g(x)\to\infty(x\to x_0)$，且 $[f(x)-1]g(x)\to a(x\to x_0)$，则

$$f(x)^{g(x)}\to e^a(x\to x_0)$$

证明　$f(x)^{g(x)}=[1+(f(x)-1)]^{g(x)}$

$$=\left\{\left[1+\frac{(f(x)-1)g(x)}{g(x)}\right]^{\frac{g(x)}{(f(x)-1)g(x)}}\right\}^{(f(x)-1)g(x)}$$

$$\to e^a(x\to x_0).$$

这个命题能将"幂"的极限转化为"积"的极限.

例52　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}$.　　　　（$1^\infty$型）

解　因为 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}=1$ 及 $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{\sin x}=\infty$，且

$$\lim_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}-1\right)\frac{1}{\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{\cos x}-1}{1+\sin x}=0,$$

故　$\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+\operatorname{tg}x}{1+\sin x}\right)^{\frac{1}{\sin x}}=e^0=1$.

例53　求 $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}$.　　　　（$1^\infty$型）

解　因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+x2^x}{1+x3^x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}=\infty$，且

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}-1\right)\frac{1}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2^x-3^x}{1+x3^x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^x-1}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+x}\cdot\frac{1}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+x}\cdot\frac{1}{x}\quad\left(\left(\frac{2}{3}\right)^x-1\sim x\ln\frac{2}{3}\,(x\to 0)\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\frac{2}{3}}{\left(\frac{1}{3}\right)^x+x}=\ln\frac{2}{3},$$

故

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+x2^x}{1+x3^x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=e^{\ln\frac{2}{3}}=\frac{2}{3}.$$

例54　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n$（$a$，$b>0$）．（$1^\infty$型）

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}-1\right)n$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[n(\sqrt[n]{a}-1)+n(\sqrt[n]{b}-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{a}-1)+\lim_{n\to\infty}n(\sqrt[n]{b}-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(\ln a+\ln b)$$

$$=\ln(ab)^{\frac{1}{2}}.$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{2}\right)^n=e^{\ln(ab)^{\frac{1}{2}}}=\sqrt{ab}.$

## 七　怎样用施笃兹(Stolz)定理求极限

在确定$\frac{\infty}{\infty}$型的待定式$\frac{x_n}{y_n}$的极限时，经常要用到施笃兹定理.

定理 6（施笃兹）　设数列$\{x_n\}$及$\{y_n\}$满足:

(i)　$y_{n+1}>y_n(n=1,2,3,\cdots)$;

(ii)　$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=+\infty$;

(iii)　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$存在（有限数或者是$\pm\infty$）

则
$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}$$

证明　1)　设$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=a$（有限），则对于任给$\varepsilon>0$，必能求得$N$，使当$n\geqslant N$时，有

$$a-\varepsilon<\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}<a+\varepsilon.$$

意即　$(y_{N+1}-y_N)(a-\varepsilon)<x_{N+1}-x_N<$
$(y_{N+1}-y_N)(a+\varepsilon)$,

$$(y_{N+2}-y_{N+1})(a-\varepsilon)<x_{N+2}-x_{N+1}<$$
$$(y_{N+2}-y_{N+1})(a+\varepsilon),$$
…………………

$$(y_n-y_{n-1})(a-\varepsilon)<x_n-x_{n-1}<$$
$$(y_n-y_{n-1})(a+\varepsilon).$$

各式相加得

$$(y_n-y_N)(a-\varepsilon)<x_n-x_N<(y_n-y_N)(a+\varepsilon),$$

因为，$\lim y_n=+\infty$，不妨假定$y_n>0(n=1,2,\cdots)$，故有

$$\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)(a-\varepsilon)<\frac{x_n}{y_n}-\frac{x_N}{y_n}<\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)(a+\varepsilon).$$

取定$\varepsilon$及$N$，且让$n\to\infty$，则因$y_n\to+\infty$，由极限单调性得

$$a-\varepsilon\leqslant\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\leqslant a+\varepsilon.$$

因$\varepsilon$为任意正数，故得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=a=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}.$$

2）设 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=+\infty$，则对于任意大的正数$M$.

当$n>N$时，有

$$x_n-x_{n-1}>M(y_n-y_{n-1}),$$

从而可得$x_n-x_N>M(y_n-y_N)$。移项并除以$y_n$（同样假定$y_n>0$，$(n=1,2,\cdots)$），得

$$\frac{x_n}{y_n}>M\left(1-\frac{y_N}{y_n}\right)+\frac{x_N}{y_n}.$$

让$n\to\infty$，得$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}\geqslant M$. 因为$M$为任意正数，故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=+\infty.$$

同理可证　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}-x_n}{y_{n+1}-y_n}=-\infty$的情形。

推论 1　若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在（有限数或者是$\pm\infty$），则其算术平均值数列

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

的极限也存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证明　令 $a_n=x_1+x_2+\cdots+x_n$，$b_n=n$. 由施笃兹定理，便有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n-a_{n-1}}{b_n-b_{n-1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{n-(n-1)}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

此性质之逆不真. 例如设$x_n=1-(-1)^n$，则

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n}}{2n}=\frac{2n}{2n}=1,$$

$$\frac{x_1+x_2+\cdots+x_{2n+1}}{2n+1}=\frac{2n+2}{2n+1},$$

即 $\frac{S_n}{n}=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\begin{cases}1 & (n\text{是偶数}),\\ \frac{2n+2}{2n+1} & (n\text{是奇数}).\end{cases}$

由此可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=1$。但$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}[1-(-1)^n]$不存在。

本性质在前面已用数列极限的$\varepsilon-N$定义证明过，读者可作一比较，说明施笃兹定理的优越性。

推论 2　若$x_n>0$且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在（有限数或者是$+\infty$），则其几何平均值数列

$$\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}\quad(n=1,2,3,\cdots)$$

的极限也存在，并且

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=\lim_{n\to\infty}x_n.$$

证明　设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$　$(0<a<+\infty)$，　$y_n=\ln x_n$，

则 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n=\ln\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\ln a$。

故有

$$\ln(\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n})=\lim_{n\to\infty}\ln\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln x_1+\ln x_2+\cdots+\ln x_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}y_n=\ln a.$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}=e^{\ln a}=a=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$。

同理可讨论$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$的情形。

例55　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_a n}{n}$（$a>1$）。　　$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

解　利用施笃兹定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a(n+1)-\log_a n}{(n+1)-n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\log_a\left(1+\frac{1}{n}\right)=0.$$

例56　求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}$，$k$ 为自然数。

$\left(\dfrac{\infty}{\infty}\text{型}\right)$

解　利用施笃兹定理有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k}{n^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^k}{(n+1)^{k+1}-n^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^k}{\left[n^{k+1}+(k+1)n^k+\dfrac{(k+1)k}{2!}n^{k-1}+\cdots+1\right]-n^{k+1}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)^k}{(k+1)n^k+\dfrac{(k+1)k}{2!}n^{k-1}+\cdots+1}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2^k\left(1+\dfrac{1}{2n}\right)^k}{k+1+\dfrac{(k+1)^k}{2!}\dfrac{1}{n}+\cdots+\left(\dfrac{1}{n}\right)^k}$$

$$=\frac{2^k}{k+1}.$$

例57　设 $x_n>0$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l\,(>0)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l$.

证明　由条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=l\,(>0)$，即正项数列

$$x_1,\ \frac{x_2}{x_1},\ \frac{x_3}{x_2},\ \cdots\frac{x_{n+1}}{x_n},\ \cdots$$

当$n\to\infty$时，有极限$l$. 于是根据推论 2，应有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_1\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdot\frac{x_3}{x_2}\cdots\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=l.$$

例58　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.

本节例 2 曾用数列极限的$\varepsilon$—$N$定义证得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$. 现在根据推论 2 来作就显得极为方便. 事实上，根据例57，取 $x_n=n$，则因 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$，所以

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

在例57的论证过程中，可以看出，它实际上又是推论 2 的一个推论，在求极限时，它有广泛的应用.

例59　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}$.

**解** 设$x_n=\frac{n!}{n^n}>0$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x_{n+1}}{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}$$

$$=\frac{1}{e}.$$

由例57便得 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sqrt[n]{n!}=\frac{1}{e}$。

## 习　　题

1　用$\varepsilon$—$N$定义证明：

（1）　$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$。

（2）　$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0\quad(a>1)$。

（3）　$x_n=\frac{1}{1.2}+\frac{1}{2.3}+\cdots+\frac{1}{(n-1)n}\to 1\ (n\to\infty)$

（4）　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$。

2　用迫敛性求下列极限：

（1）　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$。

（2）　$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)$。

3　用单调有界原理求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$，其中$a_1=\sqrt{2}$，$a_n=\sqrt{2a_{n-1}}$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^2}{2^n}$。

4　若 $a_1=a>0$，$b_1=b>0$（$a<b$），$a_{n+1}=\sqrt{a_n b_n}$，$b_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2}$，证明数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$的极限存在且相等。

5　用柯西收敛准则，证明下列数列收敛：

（1）$a_n=\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}$。

（2）$a_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$。

6　求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n+2}-\frac{n}{2}\right)$。

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+a+a^2+\cdots+a^n}{1+b+b^2+\cdots+b^n}$，（$|a|<1$，$|b|<1$）。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{3}{1\cdot 2}-\frac{5}{2\cdot 3}+\frac{7}{3\cdot 4}-\cdots(-1)^{n-1}\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)$。

（4）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{x}{n}\right)^{-n}$。

（5）$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}\right)^n$。

（6）$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3x+2}{3x-1}\right)^{2x-1}$。

(7) $\lim_{x\to 0}(1+\operatorname{tg}x)^{\operatorname{ctg}x}$.

(8) $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\frac{3}{4}\cdots\frac{2n-1}{2n}\right)$.

(9) $\lim_{n\to\infty} 2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}$.

(10) $\lim_{n\to\infty}\frac{x^n f(x)+\varphi(x)}{x^n+1}$.

(11) $\lim_{n\to\infty}\frac{n^k}{a^n}\quad(a>1)$.

(12) $\lim_{n\to\infty} n^2 g^n\quad |g|<1$.

7 用等价代换求下列极限：

(1) $\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\cdots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\cdots(x^k-1)}$.

(2) $\lim_{n\to 0}\left\{\frac{1}{n}\left[\frac{1}{(x+n)^2}-\frac{1}{x^2}\right]\right\}$.

(3) $\lim_{x\to\infty} x^3(\sqrt{x^2+\sqrt{x^4+1}}-x\sqrt{2})$.

(4) $\lim_{x\to\infty}[\sqrt{(x+a)(x+b)}-x]$.

(5) $\lim_{x\to\infty}(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}$

$-\sqrt[n]{x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n})$.

8 设 $a_u>0\ (u=1,2,3,\cdots)$，$a_u\to 0\ (u\to\infty)$，

$s_n = \sum_{u=1}^{n} a_u$，且$s_n \to \infty (n \to \infty)$，则

$$\sqrt{s_{n+1}} - \sqrt{s_n} \sim \frac{a_{n+1}}{2\sqrt{s_n}} \quad (n \to \infty).$$

9　用施笃兹定理求下列极限：

（1）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^2 + 3^2 + \cdots + (2n-1)^2}{2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2}$.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1^p + 2^p + \cdots + n^p}{n^{p+1}}$，$p$为自然数。

（3）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2}{a^n}$　$(a>1)$.

（4）$\lim\limits_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}$　$(a>0)$.

（5）$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \sqrt{2} + \sqrt[3]{3} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n}$.

# §7 判定极限不存在的若干方法

以上各节内容都是围绕如何判定数列和函数收敛及怎样求极限值展开的。本节着重介绍如何判定数列与函数发散以及证明其极限不是某数的若干方法。

## 一 用极限定义的否定形式

例 1 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-1}{3n^2+n}\neq 1$。

证明 $$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+n}-1\right| = 1-\frac{2n^2-1}{3n^2+n} > 1-\frac{2n^2}{3n^2}$$

$$= 1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3},$$

因此，只要取$\varepsilon_0=\dfrac{1}{3}$，则对所有$n$，有

$$\left|\frac{2n^2-1}{3n^2+1}-1\right| > \frac{1}{3}=\varepsilon_0,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2n^2-1}{3n^2+n}\neq 1.$$

例 2 试证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{e^n\cdot n!}{n^n}\neq\dfrac{1}{2}$.

证明 根据不等式$n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$，有

$$\frac{e^n \cdot n!}{n^n} > \frac{e^n\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n^n} = 1,$$

所以 $$\left|\frac{e^n \cdot n!}{n^n} - \frac{1}{2}\right| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

取$\varepsilon_0 = \frac{1}{2}$，则对所有$n$. 有

$$\left|\frac{e^n \cdot n!}{n^n} - \frac{1}{2}\right| > \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\frac{e^n \cdot n!}{n^n} \neq \frac{1}{2}.$$

说明 用极限的否定式证明一个数列不以某一个常数为极限，同用极限定义证明一个数列的极限，出发点是一样的，都是从估计$|x_n - A|$开始. 其不同的是：用极限定义验证某一个常数是数列$\{x_n\}$的极限时，用逐次放大不等式的方法；而用极限否定形式去否定某一个常数是数列$\{x_n\}$的极限时，却用逐次缩小不等式的方法. 在用极限定义验证极限时，关键是找$N$，而用极限否定式去否定极限时，关键是找$\varepsilon_0$.

## 二 用柯西准则的否定式

例 3 设$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}$，试证数列$\{x_n\}$发散.

证明 只须证，存在$\varepsilon_0 > 0$，对任意正整数$N$，有$m_0$，$n_0$，当$m_0 > n_0 > N$时，

$$\left|x_{m_0}-x_{n_0}\right|\geqslant\varepsilon_0.$$

因为

$$\left|x_m-x_n\right|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}$$

$$>(m-n)\frac{1}{m}=1-\frac{n}{m},$$

由此不等式可以看出，只要$\frac{n}{m}\leqslant\frac{1}{2}$，就能保证$|x_m-x_n|\geqslant\frac{1}{2}$.

于是，取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意$N$，取$n_0=N+1, m_0\geqslant 2(N+1)$，就有

$$\left|x_{m_0}-x_{n_0}\right|>(m_0-n_0)\frac{1}{m_0}=1-\frac{n_0}{m_0}\geqslant\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

从而数列$\{x_n\}$发散得证。

例 4　设 $x_n=\lg 1+\lg 2+\lg 3+\cdots+\lg n$，试证数列$\{x_n\}$发散。

证明　$|x_m-x_n|=|\lg(n+1)+\lg(n+2)+\cdots+\lg m|$

$$>(m-n)\lg(n+1)=\lg(n+1)^{(m-n)}.$$

由此不等式看出，欲使 $\lg(n+1)^{(m-n)}>1$，只要$(n+1)^{(m-n)}>10$，于是可取$\varepsilon_0=1$，对任意$N$，只要$n_0\geqslant\max\{N, 9\}$，$m_0=n_0+2$，就有

$$|x_{m_0}-x_{n_0}|>(m_0-n_0)\lg(n_0+1)$$

$$=\lg(n_0+1)^{(m_0-n_0)}>1=\varepsilon_0,$$

故数列$\{x_n\}$发散得证.

例 5　设$x_n=\frac{1}{\lg 2}+\frac{1}{\lg 3}+\frac{1}{\lg 4}+\cdots+\frac{1}{\lg n}$，试证数列

$\{x_n\}$ 发散.

证明 $|x_m - x_n| = \frac{1}{\lg(n+1)} + \cdots + \frac{1}{\lg m}$

$$> (m-n)\frac{1}{\lg m}$$

$$= \lg 10^{(m-n)} \cdot \frac{1}{\lg m}.$$

显然，只要$10^{m-n} > m$，就能保证$|x_m - x_n| > 1$，因此可取$\varepsilon_0 = 1$，对任意$N$，取$n_0 = N+1$，$m_0 = 2(N+1)$，此时，$10^{m_0-n_0} = 10^{2(N+1)-(N+1)} = 10^{N+1} > 2(N+1) = m_0$，就有

$$|x_{m_0} - x_{n_0}| = \frac{1}{\lg(n_0+1)} + \frac{1}{\lg(n_0+2)} + \cdots + \frac{1}{\lg m_0}$$

$$> (m_0 - n_0) \cdot \frac{1}{\lg m_0}$$

$$= \lg 10^{(m_0-n_0)} \cdot \frac{1}{\lg m_0}$$

$$> 1 = \varepsilon_0,$$

从而数列$\{x_n\}$发散得证。

例6 试证数列$\{x_n\} = \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$发散.

证明 估计$\left|x_m - x_n\right| = \left|\sin\frac{m\pi}{2} - \sin\frac{n\pi}{2}\right|$. 根据正弦函数的特点，当$n$为偶数时，$\sin\frac{n\pi}{2} = 0$；当$n$为奇数时，$\sin\frac{n\pi}{2} = \pm 1$。

于是，只要取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意$N$，取 $n_0=2N$，$m_0=2N+1$，就有

$$\left|x_{m_0}-x_{n_0}\right|=\left|\sin\frac{m_0\pi}{2}-\sin\frac{n_0\pi}{2}\right|=1>\frac{1}{2}=\varepsilon_0,$$

故数列$\{x_n\}$发散得证。

例7 若数列$\{S_n\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}a_i\right\}$（$a_i>0$）发散，则数列$\{x_n\}=\left\{\sum_{i=1}^{n}\frac{a_i}{S_i}\right\}$也发散。

证明

$$\begin{aligned}\left|x_m-x_n\right|&=\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_m}{S_m}\\&>\frac{a_{n+1}}{S_m}+\frac{a_{n+2}}{S_m}+\cdots+\frac{a_m}{S_m}\\&=\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_m}{S_m}\\&=\frac{S_m-S_n}{S_m}=1-\frac{S_n}{S_m}.\end{aligned}$$

由此不等式可知，只要$\frac{S_n}{S_m}<\frac{1}{2}$，就能保证$|x_m-x_n|>\frac{1}{2}$。同时因$S_n$单调递增无界，所以对任给正整数$n_0$，必存在$m_0$，使得$S_{m_0}>2S_{n_0}$即，$\frac{S_{n_0}}{S_{m_0}}<\frac{1}{2}$，因此只要取$\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意$N$，取$n_0=N+1$，必有$m_0>n_0=N+1>N$，使得$\frac{S_{n_0}}{S_{m_0}}<\frac{1}{2}$，从而

$$\left| x_{m_0} - x_{n_0} \right| > 1 - \frac{S_{n_0}}{S_{m_0}} > \frac{1}{2} = \varepsilon_0,$$

故数列 $\{x_n\}$ 发散得证.

## 三　用子列的性质

上面我们介绍了两种判定极限不存在的方法．那两种方法，从原则上讲对任何发散数列都“有权”去审查，但具体用起来很不方便，特别是对有些较复杂的数列更为困难．鉴于此，下面我们将介绍一种应用起来很灵活的方法．根据§3定理2，欲判定一个数列发散，只要我们能抽出一个发散子列即可，或者能找到两个极限不同的子列也行．这样，就可以把考察一个整体数列的某种特性，转化为考察它的一部分，从而可以作到从局部把握全局．这就是此法灵活多变的根本原因．

例8　试证数列 $\{x_n\} = \left\{\sin\frac{n\pi}{2}\right\}$ 发散。

证明　利用子列的性质，只要能选出两个极限不同的子列即可．为此

1）　令 $n_k = 4k+1$，则

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi = 1.$$

2）　令 $n'_k = 2k$，则

$$\lim_{k\to\infty} x_{n'_k} = \lim_{k\to\infty} \sin k\pi = 0.$$

故数列 $\{x_n\}$ 发散。

说明　这种方法比前面用的柯西准则的否定式要简便得多。

例 9　试证数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{\sqrt[3]{n}}\right\}$ 发散。

证明　令 $n_k=k^3$，$k=1, 2, 3, \cdots$，则得

$$x_{n_k}=\frac{k^3}{\sqrt[3]{k^3}}=k^2.$$

显然，子列 $\{x_{n_k}\}$ 发散，从而数列 $\{x_n\}$ 必发散。

例10　试证数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{\lg n(n+1)}\right\}$ 发散。

证明　$x_n=\frac{n}{\lg n(n+1)}>\frac{n}{\lg(n+1)^2}=\frac{n}{2\lg(n+1)}$. 选 $n_k=10^k-1$，$k=1, 2, 3, \cdots$，从而有

$$x_{n_k}=\frac{n_k}{\lg n_k(n_k+1)}<\frac{n_k}{2\lg(n_k+1)}=\frac{10^k-1}{2k}>k.$$

因此，子列 $\{x_{n_k}\}$ 发散，故 $\{x_n\}$ 也发散。

例11　试证 $\{x_n\}=\left\{\frac{n}{\lg(\lg n!)}\right\}$ 发散。

证明　因 $n!<n^n$，所以

$$x_n=\frac{n}{\lg(\lg n!)}>\frac{n}{\lg(\lg n^n)}=\frac{n}{\lg(n\cdot\lg n)}.$$

选 $n_k=10^k$，$k=1, 2, 3, \cdots$ 从而有

$$x_{n_k}=\frac{n_k}{\lg(\lg n_k!)}>\frac{n_k}{\lg(\lg n_k{}^{n_k})}=\frac{n_k}{\lg(n_k\cdot\lg n_k)}$$

$$=\frac{10^k}{k+\lg k}>\frac{10^k}{2k}>k.$$

所以，子列 $\{x_{n_k}\}$ 发散，故 $\{x_n\}$ 也发散。

# 习　题

1　用极限定义的否定形式证明：

（1）　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n+2}\neq 3$．

（2）　$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2}[(a+b)+(-1)^n(a-b)]\neq a\quad(a\neq b)$．

（3）　$\lim\limits_{n\to\infty}(A(-1)^n+C)=B$（$A$、$B$、$C$均为实数）．

（4）　$\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2}{2x+3}\neq 2$．

（5）　$\lim\limits_{x\to 2}(x^3+2x+1)\neq 5$．

2　用柯西准则的否定形式证明下列数列发散：

（1）　$x_n=\cos\frac{n\pi}{2}$．

（2）　$x_n=\sqrt[n]{n!}$．

（3）　$x_n=1+\frac{2}{3}+\cdots+\frac{n}{2n-1}$．

（4）　$x_n=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}$．

3　利用子列的性质证明下列数列发散：

（1）　$x_n=\sqrt[3]{\lg n}$．

（2）　$x_n=\frac{\sqrt[3]{n}}{\sin n\pi}$．

（3）　$x_n=\frac{\sqrt{n}}{\ln n}$．

（4）　$x_n=\frac{2\sin n\pi}{1+\cos n\pi}$．

# 附录 不 等 式

不等式是研究函数的一个重要工具，本附录扼要地介绍在数学分析中常用的一些不等式．

## 一 普通不等式

**定理** 若$x_i>0$（$i=1、2、\cdots，n$），且$x_1x_2\cdots x_n=1$，则
$$x_1+x_2+\cdots+x_n\geqslant n.$$

**证明** 1） 当$n=1$时，显然．

2） 假设命题对$n=k$为真，要证明$n=k+1$时命题亦真．事实上，当$x_1=x_2=\cdots=x_{k+1}=1$时，定理当然成立．现在假设$x_1，x_2，\cdots，x_{k+1}$不全为1，于是，必然有$1\leqslant i，j\leqslant k+1$使$x_i>1，x_j<1$，不妨设$x_1<1，x_{k+1}>1$，记$y=x_1x_{k+1}$，则由归纳假设有
$$y+x_2+x_3+\cdots+x_k\geqslant k,$$
所以
$$\sum_{i=1}^{k+1}x_i=(y+x_2+x_3+\cdots+x_k)+x_1+x_{k+1}-x_1x_{k+1}+1-1$$
$$\geqslant k+1+(1-x_1)(x_{k+1}-1)>k+1.$$
故命题对一切自然数为真．

由这个定理出发，可以引出一系列重要结果，并列于下

(i) 若$a_i > 0$ ($i=1, 2, \cdots, n$)，且$\alpha < 0 < \beta$，则

$$\left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

$$\leqslant \left(\frac{a_1^\beta + a_2^\beta + \cdots + a_n^\beta}{n}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

证明　令$\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_n} = a$，则 $a_1^\alpha a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha = a^{n\alpha}$，

所以

$$\frac{a_1^\alpha a_2^\alpha \cdots a_n^\alpha}{(a^\alpha)^n}$$

$$= \left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha \left(\frac{a_2}{a}\right)^\alpha \cdots \left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha = 1.$$

由上述定理知

$$\left(\frac{a_1}{a}\right)^\alpha + \left(\frac{a_2}{a}\right)^\alpha + \cdots + \left(\frac{a_n}{a}\right)^\alpha = \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{a^\alpha}$$

$$\geqslant n,$$

即　$$\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \geqslant a^\alpha,$$

从而　$$\ln \frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n} \geqslant \alpha \ln a.$$

亦即　$$\ln \left(\frac{a_1^\alpha + a_2^\alpha + \cdots + a_n^\alpha}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}} \leqslant \ln \sqrt[n]{a_1 a_1 \cdots a_n},$$

所以

$$\left(\frac{a_1^{\alpha}+a_2^{\alpha}+\cdots+a_n^{\alpha}}{n}\right)^{\frac{1}{\alpha}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}.$$

同理可证右半段.

若取$\alpha=-1$，$\beta=1$，则得“平均不等式”

(ii) $$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

式中等号当且仅当$a_1=a_2=\cdots=a_n$时成立.

这个不等式是说$n$个正数$a_1$，$a_2$，$\cdots a_n$的调和平均≤几何平均≤算术平均. 它的结构简单，应用广泛.

由(ii)易得

(iii) $$\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}\right)\geqslant n^2$$

$$(a_k>0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n).$$

由(ii) 还可以得到一个和$n$个正数 $a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$的“加权平均”相关的著名不等式

(iV) $$\left(\frac{p_1+p_2+\cdots+p_n}{\frac{p_1}{a_1}+\frac{p_2}{a_2}+\cdots+\frac{p_n}{a_n}}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

$$\leqslant a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots a_n^{p_n}$$

$$\leqslant\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

（其中$p_i>0$为有理数，$a_i>0$，$i=1,2,\cdots,n$）。

**证明**　先证右半段.

1）　若$p_i(i=1,2,\cdots n)$为自然数，则

$$\sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{a_1^{p_1}a_2^{p_2}+a_n^{p_n}}$$

$$=\sqrt[p_1+p_2+\cdots+p_n]{\underbrace{a_1a_1\cdots a_1}_{p_1个}\cdots\underbrace{a_na_n\cdots a_n}_{p_n个}}$$

$$\leqslant\frac{\overbrace{a_1+a_1+\cdots+a_1}^{p_1个}+\cdots+\overbrace{a_n+a_n+\cdots+a_n}^{p_n个}}{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

$$=\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n},$$

两边$p_1+p_2+\cdots+p_n$次方得

$$a_1^{p_1}a_2^{p_2}\cdots p_n^{p_n}$$

$$\leqslant\left(\frac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_1+p_2+\cdots+p_n}\right)^{p_1+p_2+\cdots+p_n}$$

2）　若$p_i>0(i=1,2,\cdots n)$为有理数，设其公分母为$l$，则$p_i$可以表为$p_i=\frac{m_i}{l}$（$i=1,2,\cdots,n$）。

由1)知

$$a_1^{m_1}a_2^{m_2}\cdots a_n^{m_n}$$

$$\leqslant\left(\frac{m_1a_1+m_2a_2+\cdots+m_na_n}{m_1+m_2+\cdots+m_n}\right)^{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$

$$= \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{m_1 + m_2 + \cdots + m_n},$$

两边开$l$次方得

$$a_1^{p_1} \ a_2^{p_2} \cdots \ a_n^{p_n} = \sqrt[l]{a_1^{m_1} \ a_2^{m_2} \cdots \ a_n^{m_n}}$$

$$\leqslant \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{\frac{m_1}{l} + \frac{m_2}{l} + \cdots + \frac{m_n}{l}}$$

$$= \left(\frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

再证左半段，令$b_i = \dfrac{1}{a_i} > 0$　$(i = 1, 2, \cdots, n)$，应用上面的结果有

$$b_1^{p_1} \ b_2^{p_2} \cdots \ b_n^{p_n}$$

$$\leqslant \left(\frac{p_1 b_1 + p_2 b_2 + \cdots + p_n b_n}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

$$= \left(\frac{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \cdots + \frac{p_n}{a_n}}{p_1 + p_1 + \cdots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$$

即

$$\frac{1}{a_1^{p_1} \ a_2^{p_2} \cdots \ a_n^{p_n}}$$

$$\leqslant \left(\frac{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \cdots + \frac{p_n}{a_n}}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}\right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_2},$$

亦即　　$a_1^{p_1} \ a_2^{p_2} \cdots \ a_n^{p_n}$

$$\geqslant \left( \frac{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}{\frac{p_1}{a_1} + \frac{p_2}{a_2} + \cdots + \frac{p_n}{a_n}} \right)^{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}.$$

用极限方法可以进一步证明：对实数$p_i > 0$（$i = 1, 2, \cdots, n$），这个结果也是对的.

若令 $a_i = \frac{p_i}{p_1 + p_2 + \cdots + p_n}$ （$i = 1, 2, \cdots, n$），则不等式(iV)有下面的等价形式

$$\frac{1}{\frac{\alpha_1}{a_1} + \frac{\alpha_2}{a_2} + \cdots + \frac{\alpha_n}{a_n}} \leqslant a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \cdots a_n^{\alpha_n}$$

$$\leqslant \alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2 + \cdots + \alpha_n a_n$$

（这里$a_i > 0$，$\alpha_i > 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$。且 $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n = 1$）.

（V） 贝努利不等式

设$x_i > -1$，且$x_i x_j > 0$（$i, j = 1, 2, \cdots, n$），则

$$1 + \sum_{i=1}^{n} x_i \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \leqslant \left( 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^n.$$

证明 先证右半段. 由于$1 + x_i > 0$（$i = 1, 2, \cdots, n$），由“平均不等式”有

$$\prod_{i=1}^{n} (1 + x_i) \leqslant \left( \frac{(1 + x_1) + (1 + x_2) + \cdots + (1 + x_n)}{n} \right)^n$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \right)^n.$$

再证左半段，

1） 当$n=1$时，显然。

2） 假设不等式对$n=k$为真，从而证明$n=k+1$，时亦然，事实上

$$\prod_{i=1}^{k+1}(1+x_i)=(1+x_{k+1})\prod_{i=1}^{k}(1+x_i)$$

$$\geqslant(1+x_{k+1})(1+\sum_{i=1}^{k}x_i)$$

$$=1+\sum_{i=1}^{k+1}x_i+\sum_{i=1}^{k}x_{k+1}x_i$$

$$\geqslant 1+\sum_{i=1}^{k+1}x_i,$$

故不等式对一切自然数$n$为真。

贝努利不等式的特例：

当$x_1=x_2=\cdots=x_n=x>-1$时，有

$$(1+x)^n\geqslant 1+nx.$$

若令 $1+x=b^{\frac{1}{n}}>0$，有

$$b^{\frac{1}{n}}-1\leqslant\frac{b-1}{n}.$$

（Ⅵ） 设$a_i>0$（$i=1, 2, \cdots, n$），$M=\max\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，$m=\min\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，则

$$m\leqslant\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$$

$$\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant M.$$

证明　因为$a_i\geqslant m>0$，所以$\frac{1}{a_i}\leqslant\frac{1}{m}(i=1,2,\cdots,n)$，

从而$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\leqslant\frac{n}{m}$，因此

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\geqslant m. \qquad (1')$$

又　$0<a_i\leqslant M$，所以$\sum_{i=1}^{n}a_i\leqslant nM$　$(i=1,2,\cdots,n)$，即

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\leqslant M. \qquad (2')$$

联合(1′)，(2′)及(ii)知不等式为真。

(Vii)　设$a_i$为实数，$b_i>0$（$i=1,2,\cdots,n$），又

$$M=\max\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}\right\},$$

$$m=\min\left\{\frac{a_1}{b_1},\ \frac{a_2}{b_2},\ \cdots,\ \frac{a_n}{b_n}\right\},$$

则

$$m\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{b_1+b_2+\cdots+b_n}\leqslant M.$$

证明　由$m\leqslant\frac{a_i}{b_i}\leqslant M$　$(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$mb_i \leqslant a_i \leqslant Mb_i \quad (i=1, 2, \cdots, n),$$

$$m\sum_{i=1}^{n} b_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i \leqslant M\sum_{i=1}^{n} b_i,$$

即

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n} \leqslant M.$$

当$b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 1$时，有

$$m \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \leqslant M.$$

（V*iii*） 柯西不等式

对于任意两组实数 $\alpha_i$，$\beta_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right).$$

**证明** 对于任意的实数$x$，有

$$\sum_{i=1}^{n} (\alpha_i x + \beta_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i^2 x^2 + 2x\alpha_i\beta_i + \beta_i^2)$$

$$= x^2 \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 + 2x\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i^2$$

$$\geqslant 0.$$

所以，这个关于$x$的二次三项式的系数应满足

$$\left(2\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\beta_i\right)^2 - 4\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right) \leqslant 0.$$

即

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i^2\right).$$

## 二　绝对值不等式

关于实数$a$的绝对值有下列几种定义方法.

几何定义法　实数$a$的绝对值是指：数轴上以$a$为坐标的点$P_a$与原点O的距离$|OP_a|$.

代数定义法　实数$a$的绝对值定义为：

$$|a| = \begin{cases} a, & a \geqslant 0, \\ -a, & a < 0. \end{cases}$$

分析定义法　实数$a$的绝对值定义为：

$$|a| = \max\{-a, a\}$$

关于绝对值有下面一些性质：

（1）　$|a| = |-a| \geqslant 0$．当且仅当$a=0$时，有$|a|=0$.

（2）　$-|a| \leqslant a \leqslant |a|$.

（3）　关系式$|a| < h(h > 0)$等价于不等式$-h < a < h$；同样地$|a| \leqslant h$（$h \geqslant 0$）等价于$-h \leqslant a \leqslant h$.

证明　由$|a| = \max\{-a, a\} < h$，可推出$a < h$，或$-a < h$，从而有$-h < a < b$.

反过来，若$-h < a < h$，此即$\begin{cases} a < h \\ -a < h \end{cases}$，从而有$|a| = \max\{-a, a\} < h$.

同样可以证明第二部分.

（4）　对于任何实数$a$和实数$b$，有

$$|a-b| \leqslant |a| + |b|.$$

用数学归纳法容易将上述绝对值不等式推广到一般的情形

$$\left|\sum_{i=1}^{n} a_i\right| \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

（5） $|a-b| \leqslant |a-c| + |c-b|$.

证明 $|a-b| = |(a-c)+(c-b)| \leqslant |a-c| + |c-b|$.

（6） $|a-b| \geqslant |a| - |b|$.

由（4）、（6）得

$$|a| - |b| \leqslant |a \pm b| \leqslant |a| + |b|.$$

（7） $|ab| = |a||b|$.

（8） $\left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$.